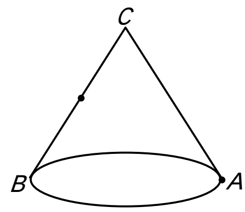
Kangourou della Matematica 2007
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2007

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Considera i numeri interi da 1 a 25 compresi. Vuoi sceglierne alcuni in modo che la somma di due qualunque tra quelli che scegli non sia un multiplo di 3. Quanti numeri puoi scegliere al massimo?

J2. (*7 punti*) In un cono circolare retto il raggio del cerchio di base misura 3 cm e la generatrice 6 cm. Una formica vuole arrampicarsi sulla superficie laterale del cono dal punto *A* sul cerchio di base al punto medio della generatrice opposta *BC* (vedi figura). Quanto misura il percorso più breve che può fare la formica?



J3. (*11 punti*) Il quadrato di un numero *ab* di 2 cifre finisce con le stesse cifre *ab*. Quanti e quali numeri hanno questa proprietà?

J4. (*14 punti*) Ho 52 carte su ciascuna delle quali è indicato un numero intero positivo e la somma di tutti i numeri indicati è un numero dispari. Gioco con un amico in questo modo: dopo aver messo tutte le carte in fila sul tavolo, uno rimuove una carta a un'estremità della fila e poi passa la mano all'altro che fa la stessa cosa; si itera finché non restano più carte sul tavolo. Alla fine per ogni giocatore si sommano i numeri scritti sulle carte che ha scelto; vince chi ha le carte la somma dei cui numeri è maggiore. C'è una strategia vincente per chi inizia il gioco? In caso affermativo indicane una, in caso negativo fornisci una motivazione.

J5. (*18 punti*) Sette circonferenze poste in sequenza sono tangenti a due rette non parallele e sono tangenti esternamente la prima alla seconda, la seconda alla terza e così via. Se il raggio della più piccola è *r* e quello della più grande è *R*, quanto vale il raggio della terza?

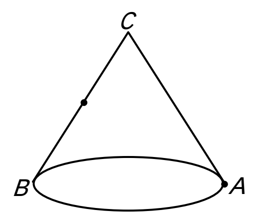
J6. (*22 punti*) Un insieme S di numeri naturali positivi è detto "poroso" se è vuoto oppure non contiene tre interi consecutivi. Quanti sono i sottoinsiemi porosi dell'insieme {1, 2, 3, ..., 10}?

LIVELLO JUNIOR

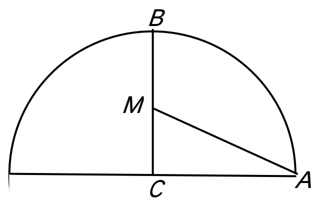
J1. (*5 punti*) Considera i numeri interi da 1 a 25 compresi. Vuoi sceglierne alcuni in modo che la somma di due qualunque tra quelli che scegli non sia un multiplo di 3. Quanti numeri puoi scegliere al massimo?

Soluzione: 10.
Nell'insieme dei numeri scelti non possono comparire due multipli di 3 e neppure un numero che diviso per 3 dia resto 1 insieme ad uno che diviso per 3 dia resto 2. Ora, i numeri che divisi per 3 danno resto 1 sono 9 e quelli che danno resto 2 sono 8. Dunque, perché il numero di elementi che scegli sia massimo, devi scegliere tutti i numeri che danno resto 1 e uno qualsiasi dei multipli di 3.

J2. (*7 punti*) In un cono circolare retto il raggio del cerchio di base misura 3 cm e la generatrice 6 cm. Una formica vuole arrampicarsi sulla superficie laterale del cono dal punto *A* sul cerchio di base al punto medio della generatrice opposta *BC* (vedi figura). Quanto misura il percorso più breve che può fare la formica?



Soluzione: $3\sqrt{5}$ cm.
Lo sviluppo della superficie laterale del cono è un settore circolare di centro *C* e raggio pari alla lunghezza della generatrice (6 cm) e arco pari alla circonferenza di base (6π cm): quindi è una semicirconferenza sulla quale il punto *A* sta a un'estremità del diametro e il punto *B* sta sul raggio perpendicolare a *CA*. Visto sullo sviluppo, il percorso più breve da *A* al punto medio *M* di *BC* è ovviamente quello rettilineo, quindi si deve calcolare la lunghezza di *AM*, sapendo che *CM* è lungo 3 cm e *CA* è lungo 6 cm.



J3. (*11 punti*) Il quadrato di un numero *ab* di 2 cifre finisce con le stesse cifre *ab*. Quanti e quali numeri hanno questa proprietà?

Soluzione: Sono 2: 625=25x25 e 5776=76x76.
Infatti l'uguaglianza

$$(10a + b)^2=100a^2 +20ab + b^2 = 100X +10a + b,$$

dove a è una cifra maggiore di 0 e X può denotare anche un numero di due cifre, implica

$$b^2 = b + 10y$$

(ove y denota un numero di una cifra sola) e, visto che le uniche cifre il cui quadrato abbia come cifra delle unità la cifra stessa sono 1, 5, 6, si devono esaminare i casi seguenti.

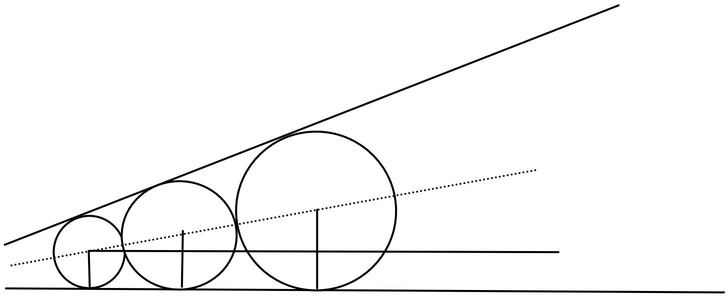
- $b = 1$. Allora $100a^2 + 20a + 1 = 100X + 10a + 1$, cioè $100a^2 + 10a = 100X$, impossibile poiché questo si verifica solo se $a = 10$.
- $b = 5$. Allora $100a^2 + 100a + 25 = 100X + 10a + 5$, cioè $100a^2+ 90a + 20=100X$: questo si verifica solo se $a = 2$ e quindi il numero è 25.
- $b = 6$. Allora $100a^2 + 100a + 20a + 36=100X + 10a + 6$, cioè $100a^2+ 100a + 10a + 30=100X$: questo si verifica solo se $10a + 30 = 100$ e quindi $a = 7$, cioè il numero è 76.

J4. (*14 punti*) Ho 52 carte su ciascuna delle quali è indicato un numero intero positivo e la somma di tutti i numeri indicati è un numero dispari. Gioco con un amico in questo modo: dopo aver messo tutte le carte in fila sul tavolo, uno rimuove una carta a un'estremità della fila e poi passa la mano all'altro che fa la stessa cosa; si itera finché non restano più carte sul tavolo. Alla fine per ogni giocatore si sommano i numeri scritti sulle carte che ha scelto; vince chi ha le carte la somma dei cui numeri è maggiore. C'è una strategia vincente per chi inizia il gioco? In caso affermativo indicane una, in caso negativo fornisci una motivazione.

Soluzione: Sì.
Basta considerare la somma delle carte di posto pari e quella delle carte di posto dispari e scegliere come carta di inizio quella appartenente all'insieme X la cui somma è maggiore, pescando alle mosse successive la carta di lato a quella appena rimossa dall'avversario. Infatti in questo modo si costringe l'avversario a pescare sempre dall'insieme complementare di X.

J5. (*18 punti*) Sette circonferenze poste in sequenza sono tangenti a due rette non parallele e sono tangenti esternamente la prima alla seconda, la seconda alla terza e così via. Se il raggio della più piccola è r e quello della più grande è R, quanto vale il raggio della terza?

Soluzione: $(R/r)^{1/3}r$.



Si osserva innanzitutto che le circonferenze hanno i centri allineati su una delle bisettrici dell'angolo formato dalle due rette e i raggi in progressione geometrica. Infatti, consideriamo tre circonferenze consecutive di raggi a, b, c e i triangoli rettangoli individuati dal segmento congiungente i centri, dalla retta parallela ad una delle rette date e passante per il centro della circonferenza più piccola e dai segmenti che proiettano gli altri due centri su tale retta (vedi figura). I triangoli sono simili; visto che i cerchi sono tangenti, l'ipotenusa del più piccolo è costituita dai raggi dei due cerchi più piccoli e quindi misura $a + b$; similmente l'ipotenusa del più grande misura $a + 2b + c$: vale quindi la proporzione $(b-a) : (a+b) = (c-a) : (a+2b+c)$, cioè $b^2 = ac$, vale a dire $c/b = b/a =$ costante.
Detta k la costante di proporzionalità, si ha $R=k^6r$, cioè $k=(R/r)^{1/6}$ e quindi la terza circonferenza ha raggio $k^2r=(R/r)^{1/3}r$.

J6. (*22 punti*) Un insieme S di numeri naturali positivi è detto "poroso" se è vuoto oppure non contiene tre interi consecutivi. Quanti sono i sottoinsiemi porosi dell'insieme {1, 2, 3, ..., 10}?

Soluzione: 504.

Infatti, sia S un sottoinsieme poroso di $\mathscr{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Esso può

- non contenere n: in tal caso è un sottoinsieme poroso di $\mathscr{n}' = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$;
- contenere n ma non contenere $n-1$: in tal caso $S \setminus \{n\}$ è un sottoinsieme poroso di $\mathscr{n}'' = \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$;
- contenere n e $n-1$ ma non contenere $n-2$: in tal caso $S \setminus \{n-1, n\}$ è un sottoinsieme poroso di $\mathscr{n}''' = \{1, 2, 3, \dots, n-3\}$.

Si ha così una partizione dell'insieme dei sottoinsiemi porosi di $\mathscr{n}$ in insiemi disgiunti, per cui – detti P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} rispettivamente il numero di sottoinsiemi porosi di $\mathscr{n}$, $\mathscr{n}'$, $\mathscr{n}''$, $\mathscr{n}'''$ – si ha $P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3}$. Il calcolo del numero di sottoinsiemi porosi di {1, 2, ... , 10} può quindi essere fatto per ricorrenza, dopo aver osservato che $P_0 = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ e quindi $P_3 = 7$, $P_4 = 13$, $P_5 = 24$, $P_6 = 44$, $P_7 = 81$, $P_8 = 149$, $P_9 = 274$, $P_{10} = 504$.