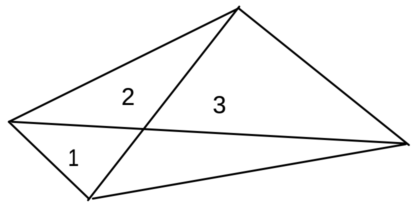
Kangourou della Matematica 2007
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2007

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) In una classe in cui ci sono almeno due maschi e due femmine, ogni ragazzo stringe una volta la mano a ogni ragazza. In totale sono state effettuate 77 strette di mano. Quanti sono gli allievi (senza distinguere tra maschi e femmine) di quella classe?

C2. (*7 punti*) Le diagonali dividono il quadrilatero in figura in quattro triangoli; di tre di essi sono indicate le aree. Qual è l'area del quarto triangolo (rispetto alla stessa unità di misura)?



C3. (*11 punti*) Considera i numeri interi da 1 a 25 compresi. Vuoi sceglierne alcuni in modo che la somma di due qualunque tra quelli che scegli non sia un multiplo di 3. Quanti numeri puoi scegliere al massimo?

C4. (*14 punti*) È possibile porre 21 piastrelle rettangolari, i cui lati misurano 1 cm e 3 cm, sopra una scacchiera 8x8 formata da quadrati di lato 1 cm in modo che non ci siano piastrelle sporgenti dalla griglia, né parzialmente sovrapposte? In caso di risposta affermativa mostra con un disegno come disporresti le piastrelle, in caso di risposta negativa spiega i motivi per cui non è possibile. [*Nel foglio per riportare le soluzioni troverai una quadrettatura sottostante per riportare i disegni che hai fatto per motivare la risposta a questo quesito.*]

C5. (*18 punti*) Una megalopoli ha la forma di un rettangolo di 20 km per 13 km; essa è divisa in zone quadrate di un chilometro di lato. La città è attraversata diagonalmente (quindi da un vertice al vertice opposto) da un fiume che immaginiamo rettilineo e filiforme; esso non può essere guadato, per cui sono necessari dei ponti. Il Consiglio Comunale ha deliberato di costruire un ponte in ogni zona attraversata dal fiume. Quanti ponti è necessario costruire? Cambierebbe qualcosa se le misure della città fossero 21 km e 12 km? Motiva le tue affermazioni.

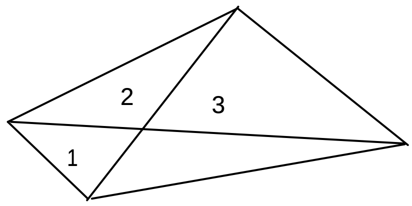
C6. (*22 punti*) Quanto vale la somma delle prime sei cifre dopo la virgola della divisione per 7 di 2^{2007}?

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) In una classe in cui ci sono almeno due maschi e due femmine, ogni ragazzo stringe una volta la mano a ogni ragazza. In totale sono state effettuate 77 strette di mano. Quanti sono gli allievi (senza distinguere tra maschi e femmine) di quella classe?

Soluzione: 18.
Se indichiamo con N il numero di ragazze che ci sono in classe, ogni ragazzo effettua N strette di mano: quindi il numero di strette di mano è il prodotto del numero dei ragazzi per N. Ora, 77 può essere visto come prodotto di due numeri interi solo in due modi (a meno dell'ordine dei fattori): 77x1 e 7x11. Dal momento che nella classe ci sono almeno due maschi e due femmine, 7x11 è il solo caso che fa per noi: quindi gli allievi sono 7+11=18.

C2. (*7 punti*) Le diagonali dividono il quadrilatero in figura in quattro triangoli; di tre di essi sono indicate le aree. Qual è l'area del quarto triangolo (rispetto alla stessa unità di misura)?



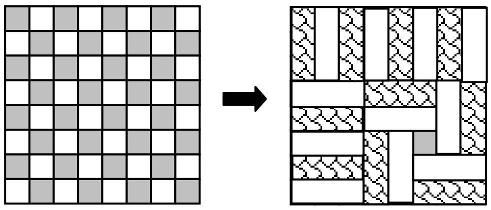
Soluzione: 1,5
Assumendo come basi dei triangoli i lati che stanno sulle diagonali del quadrilatero, le basi dei triangoli di area 1 e 2 sono in proporzione 1:2 come le loro aree (poiché hanno la stessa altezza rispetto a tali basi); similmente le aree dei restanti due triangoli sono proporzionali alle loro basi e quindi l'area incognita è la metà di 3.

C3. (*11 punti*) Considera i numeri interi da 1 a 25 compresi. Vuoi sceglierne alcuni in modo che la somma di due qualunque tra quelli che scegli non sia un multiplo di 3. Quanti numeri puoi scegliere al massimo?

Soluzione: 10.
Nell'insieme dei numeri scelti non possono comparire due multipli di 3 e neppure un numero che diviso per 3 dia resto 1 insieme ad uno che diviso per 3 dia resto 2. Ora, i numeri che divisi per 3 danno resto 1 sono 9 e quelli che danno resto 2 sono 8. Dunque, perché il numero di elementi che scegli sia massimo, devi scegliere tutti i numeri che danno resto 1 e uno qualsiasi dei multipli di 3.

C4. (*14 punti*) È possibile porre 21 piastrelle rettangolari, i cui lati misurano 1 cm e 3 cm, sopra una scacchiera 8x8 formata da quadrati di lato 1 cm in modo che non ci siano piastrelle sporgenti dalla griglia, né parzialmente sovrapposte? In caso di risposta affermativa mostra con un disegno come disporresti le piastrelle, in caso di risposta negativa spiega i motivi per cui non è possibile. [*Puoi usare la quadrettatura sottostante per riportare i disegni che hai fatto per motivare la risposta a questo quesito.*]

Soluzione: Sì.
Si può operare nel modo indicato a lato.
Una volta ritagliato un orlo di 3 cm su due bordi consecutivi della griglia, resta una griglia 5x5 che può essere riempita al meglio solo evitando di accostare 3 piastrelle a formare un quadrato.



C5. (*18 punti*) Una megalopoli ha la forma di un rettangolo di 20 km per 13 km; essa è divisa in zone quadrate di un chilometro di lato. La città è attraversata diagonalmente (quindi da un vertice al vertice opposto) da un fiume che immaginiamo rettilineo e filiforme; esso non può essere guadato, per cui sono necessari dei ponti. Il Consiglio Comunale ha deliberato di costruire un ponte in ogni zona attraversata dal fiume. Quanti ponti è necessario costruire? Cambierebbe qualcosa se le misure della città fossero 21 km e 12 km? Motiva le tue affermazioni.

Soluzione: 32 se le misure sono 20 km e 13 km; 30 se le misure sono 21 km e 12 km.
Possiamo schematizzare la megalopoli con una griglia 20x13: pensiamo a 20 caselle in orizzontale e a 13 in verticale. Il fiume attraversa una e una sola volta ognuna delle 19 “linee interne” verticali e ognuna delle 12 “linee interne” orizzontali, ma non attraversa alcun nodo interno alla griglia, poiché 20 e 13 sono interi primi tra loro. Allora gli attraversamenti di linee interne avvengono in punti tutti diversi tra loro e ad ogni attraversamento corrisponde un cambio di casella (ovviamente nessuna casella viene attraversata più di una volta). Complessivamente il fiume tocca allora 1+19+12=32 caselle e 32 è il numero di ponti richiesti.
Se le misure fossero 21 km e 12 km i ponti necessari sarebbero 30: infatti 21 e 12 hanno in comune il fattore 3: allora si può suddividere la mappa in 3x3 rettangoli di misura 7 e 4 km rispettivamente. Il fiume (cioè la diagonale del rettangolo grande) passa per i vertici di ciascuno dei tre rettangoli 7x4 che contengono la diagonale e per nessun altro vertice: in ciascuno di questi, ripetendo il ragionamento, si trovano 10 ponti.

C6. (*22 punti*) Quanto vale la somma delle prime sei cifre dopo la virgola della divisione per 7 di 2^{2007}?

Soluzione: 27.
Nella divisione (in interi) per 7 di 2^{2007} non si può ottenere 0, poiché 7 non è tra i fattori di 2^{2007}: quindi si possono avere come resti solo i numeri da 1 a 6; proseguendo nella divisione (nei numeri decimali periodici, cioè non più negli interi, bensì nei razionali) se il resto è 1 si ottiene:

```
1,0      :7 = 0,142857…
 30
  20
   60
    40
     50
      1…
```

e di qui in poi quozienti e resti si ripetono. Questo mostra che la somma delle prime 6 cifre decimali sarebbe la stessa anche se il resto fosse 2, 3, 4, 5, 6: basta pensare di entrare in questa divisione rispettivamente alla riga 3, 2, 5, 6, 4. Quindi in ogni caso la somma è 27.
Vedi la soluzione di S4 per una dimostrazione del fatto che il resto della divisione (intera) per 7 di 2^{2007} è proprio 1.