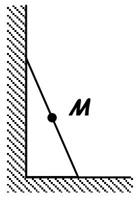
Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

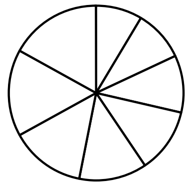
LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con *M*, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce ad una parete con cui il muro fa angolo. Il muro ed il pavimento sono di marmo molto lucido, per cui lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive *M* sulla parete? Motiva la tua affermazione.



J2. (*7 punti*) Denotiamo con *n* un numero intero maggiore di 1 e supponiamo che *n* punti di una circonferenza siano numerati da 1 a *n* in un ordine del tutto casuale. Per ogni coppia (non ordinata) di punti adiacenti consideriamo il valore assoluto della differenza dei due numeri corrispondenti; sommiamo quindi tutti i valori assoluti così ottenuti. Quanto vale al minimo questa somma ?

J3. (*11 punti*) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colore diverso, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?



J4. (*14 punti*) Siano *p* e *q* due numeri primi, diversi fra loro ed entrambi diversi da 2, tali che non ci sia alcun numero primo strettamente compreso tra *p* e *q* . È vero che *p* + *q* è il prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1 (non necessariamente diversi tra loro)? In caso di risposta affermativa danne una motivazione, in caso di risposta negativa trova un contro-esempio.

J5. (*18 punti*) Considera i numeri di 3 cifre le cui cifre possano essere riordinate in modo da formare terne di cifre consecutive (ad es. le cifre di 786 si possono riordinare nella terna 678, costituita da cifre consecutive). Quanti di questi numeri hanno un numero dispari di divisori (diversi fra loro)?

J6. (*22 punti*) Tutti i punti di un piano sono colorati o in rosso o in blu e c'è almeno un punto rosso ed almeno un punto blu. Considera le due configurazioni proposte qui di seguito.

a) *Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente un punto blu.*

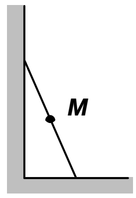
b) *Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente due punti blu.*

È possibile che si verifichi a)? È possibile che si verifichi b)? Motiva le tue risposte.

Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con *M*, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce ad una parete con cui il muro fa angolo. Il muro ed il pavimento sono di marmo molto lucido, per cui lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive *M* sulla parete? Motiva la tua affermazione.

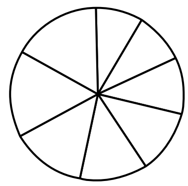


Soluzione: un quarto di circonferenza con centro nel vertice dell'angolo tra il muro e il pavimento e raggio pari a metà della lunghezza della sbarra.
In ciascun istante in cui la sbarra scivola, si denoti con *ABC* il triangolo, rettangolo in *A*, evidenziato in figura. Se *M* è il punto medio dell'ipotenusa *BC*, si ha *AM* = *MB* = *MC* (infatti *BC* è una delle due diagonali del rettangolo che ha in comune tre vertici con il triangolo *ABC*): quindi la distanza di *M* da *A* è costante durante il movimento, per cui la traiettoria descritta da *M* è un quarto della circonferenza con centro in *A* e raggio pari a metà della lunghezza della sbarra.

J2. (*7 punti*) Denotiamo con *n* un numero intero maggiore di 1 e supponiamo che *n* punti di una circonferenza siano numerati da 1 a *n* in un ordine del tutto casuale. Per ogni coppia (non ordinata) di punti adiacenti consideriamo il valore assoluto della differenza dei due numeri corrispondenti; sommiamo quindi tutti i valori assoluti così ottenuti. Quanto vale al minimo questa somma ?

Soluzione: $2n - 2$.
Il punto 1 e il punto *n* ripartiscono la circonferenza in due archi: per ciascuno di essi la somma dei valori assoluti che ci interessano non può essere inferiore a $n - 1$, quindi la somma totale non può essere minore di $2n - 2$. D'altra parte, questo valore viene realizzato quando la numerazione viene effettuata rispettando il verso orario o antiorario dei punti. Ci sono però casi in cui la somma risulta maggiore: ad es. se $n = 4$ e si assegnano ai punti i numeri 1, 3, 2, 4 in verso orario, le somme sono del tipo: $(3 - 1) + (3 - 2) + (4 - 2) + (4 - 1) = 8 > 6 = 2x4 - 2$.

J3. (*11 punti*) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colore diverso, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?

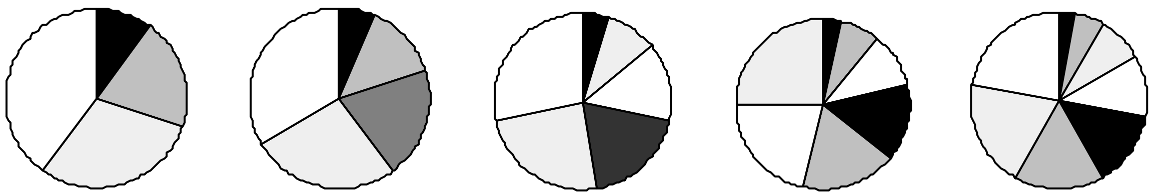


Soluzione: 5.

Sia n il numero degli spicchi. Se $n = 5$ sono necessari 5 colori,

- se n è un multiplo di 3 bastano 3 colori, ordinati come ...1231231...
- se n diviso per 3 dà resto 1 (come succede con 4, 7, 10, 13, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234,
- se n diviso per 3 dà resto 2, ma è maggiore di 5 (come succede con 8, 11, 14, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234 1234.

Il disegno illustra la situazione da $n = 4$ a $n = 8$.



J4. (*14 punti*) Siano p e q due numeri primi, diversi fra loro ed entrambi diversi da 2, tali che non ci sia alcun numero primo strettamente compreso tra p e q. È vero che $p + q$ è il prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1 (non necessariamente diversi tra loro)? In caso di risposta affermativa danne una motivazione, in caso di risposta negativa trova un contro-esempio.

Soluzione: è vero.

Nelle nostre ipotesi $p + q$ è pari: se non potesse essere scritto come prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1, sarebbe della forma $2r$ con r numero primo. Ma allora r sarebbe un numero primo strettamente compreso tra p e q (essendone la media aritmetica).

J5. (*18 punti*) Considera i numeri di 3 cifre le cui cifre possano essere riordinate in modo da formare terne di cifre consecutive (ad es. le cifre di 786 si possono riordinare nella terna 678, costituita da cifre consecutive). Quanti di questi numeri hanno un numero dispari di divisori (diversi fra loro)?

Soluzione: due.
Le terne, elencate in modo che in ciascuna le cifre appaiano in ordine crescente, sono 012 123 234 345 456 567 678 789. Vogliamo appurare quanti, tra i numeri che si possono ottenere permutando le cifre di ognuna di queste terne, sono dei quadrati perfetti: infatti tutti i divisori di un numero, che non ne siano radici quadrate, si presentano a coppie di numeri distinti. Conviene quindi elencare i quadrati da $11^2 = 121$ a $31^2 = 961$: 144, 169, 196, 225, 256, 289, $324 = 18^2$ (ecco il primo!), 361, 400, 441, 484, 529, $576 = 24^2$ (ecco il secondo!), 625, 676, 729, 784, 841, 900.

J6. (*22 punti*) Tutti i punti di un piano sono colorati o in rosso o in blu e c'è almeno un punto rosso ed almeno un punto blu. Considera le due configurazioni proposte qui di seguito.

a) Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente un punto blu.
b) Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente due punti blu.

È possibile che si verifichi a)? È possibile che si verifichi b)? Motiva le tue risposte.

Soluzione: la a) non è possibile.
Infatti sia *B* un punto blu: sulla circonferenza di centro *B* e raggio 1 centimetro dovrebbe trovare posto un altro punto blu, diciamo B'. Allora sulla circonferenza di raggio 1 centimetro, centrata nel terzo vertice di un triangolo equilatero che ha per primi due vertici B e B', ci sarebbero almeno due punti blu: B e B'.
La b) invece è realizzabile.
Si colorino di blu una retta fissata e tutte le rette ad essa parallele che distino 2 centimetri dalla più vicina retta blu; si colori di rosso il resto del piano. Una circonferenza di raggio 1 centimetro o ha centro equidistante da due di queste rette e quindi risulta ad esse tangente (e i punti di tangenza sono i due punti blu), oppure interseca solo una di queste rette, esattamente in due punti (che sono ovviamente i suoi unici punti blu).