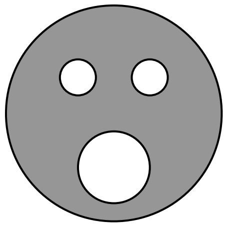
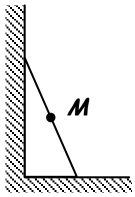
Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

LIVELLO CADET

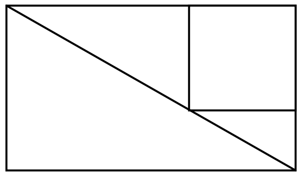


C1. (*5 punti*) Il raggio dei due cerchi piccoli è un sesto del raggio del cerchio grande. Il raggio del cerchio di media misura è il doppio di quello dei cerchi piccoli. Quale frazione del cerchio grande è colorata in grigio?

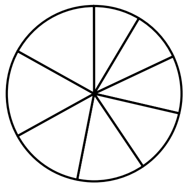


C2. (*7 punti*) Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con *M*, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce ad una parete con cui il muro fa angolo. Il muro ed il pavimento sono di marmo molto lucido, per cui lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive *M* sulla parete? Motiva la tua affermazione.

C3. (*11 punti*) In figura sono rappresentati un rettangolo di base *a* e altezza *b*, ed un quadrato avente un vertice sulla diagonale del rettangolo e il vertice opposto in comune con il rettangolo. Che cosa si può dire circa i numeri che forniscono (rispetto alle opportune unità di misura) l'area e il perimetro del rettangolo se il quadrato ha lato 2?



C4. (*14 punti*) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colore diverso, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?



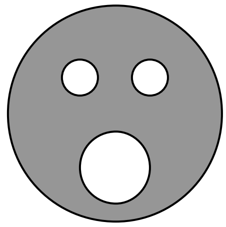
C5. (*18 punti*) Nell'operazione indicata a lato ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse; inoltre nessuna lettera rappresenta la cifra 0. Quanto vale il risultato?

ORE +
ORE +
ORE =
VIVE

C6. (*22 punti*) Considera i numeri di 3 cifre le cui cifre possano essere riordinate in modo da formare terne di cifre consecutive (ad es. le cifre di 786 si possono riordinare nella terna 678, costituita da cifre consecutive). Quanti di questi numeri hanno un numero dispari di divisori (diversi fra loro)?

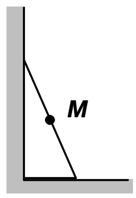
Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

LIVELLO CADET



C1. (*5 punti*) Il raggio dei due cerchi piccoli è un sesto del raggio del cerchio grande. Il raggio del cerchio di media misura è il doppio di quello dei cerchi piccoli. Quale frazione del cerchio grande è colorata in grigio?

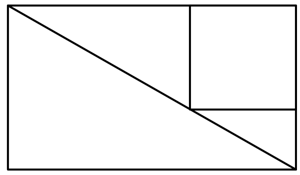
Soluzione: 5/6.
Fatto pari a 1 il raggio dei cerchi piccoli, il raggio di quello medio è 2 e il raggio di quello grande è 6. Allora l'area del cerchio grande (in unità quadrate) è $6^2\pi$, quella della regione grigia è $(6^2 - 2^2 - 2)\pi$ e quindi il rapporto vale 5/6.



C2. (*7 punti*) Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con *M*, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce ad una parete con cui il muro fa angolo. Il muro ed il pavimento sono di marmo molto lucido, per cui lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive *M* sulla parete? Motiva la tua affermazione.

Soluzione: un quarto di circonferenza con centro nel vertice dell'angolo tra il muro e il pavimento e raggio pari a metà della lunghezza della sbarra.
In ciascun istante in cui la sbarra scivola, si denoti con *ABC* il triangolo, rettangolo in *A*, evidenziato in figura. Se *M* è il punto medio dell'ipotenusa *BC*, si ha *AM* = *MB* = *MC* (infatti *BC* è una delle due diagonali del rettangolo che ha in comune tre vertici con il triangolo *ABC*): quindi la distanza di *M* da *A* è costante durante il movimento, per cui la traiettoria descritta da *M* è un quarto della circonferenza con centro in *A* e raggio pari a metà della lunghezza della sbarra.

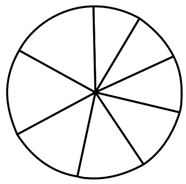
C3. (*11 punti*) In figura sono rappresentati un rettangolo di base a e altezza b, ed un quadrato avente un vertice sulla diagonale del rettangolo e il vertice opposto in comune con il rettangolo. Che cosa si può dire circa i numeri che forniscono (rispetto alle opportune unità di misura) l'area e il perimetro del rettangolo se il quadrato ha lato 2?



Soluzione: i due numeri sono uguali.

Tutti i triangoli rettangoli che compaiono in figura sono simili. In particolare $a : b = (a - 2) : 2$, quindi $a\,b = 2(a + b)$.

C4. (*14 punti*) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colore diverso, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?

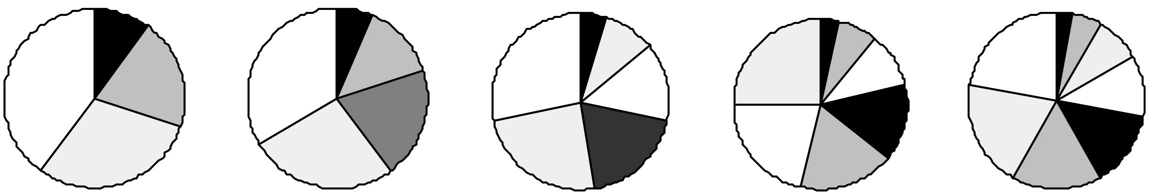


Soluzione: 5.

Sia n il numero degli spicchi. Se $n = 5$ sono necessari 5 colori,

- se n è un multiplo di 3 bastano 3 colori, ordinati come ...1231231...
- se n diviso per 3 dà resto 1 (come succede con 4, 7, 10, 13, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234,
- se n diviso per 3 dà resto 2, ma è maggiore di 5 (come succede con 8, 11, 14, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234 1234.

Il disegno illustra la situazione da $n = 4$ a $n = 8$.



C5. (*18 punti*) Nell'operazione indicata a lato ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse; inoltre nessuna lettera rappresenta la cifra 0. Quanto vale il risultato?

$$\begin{array}{r} ORE\ + \\ ORE\ + \\ \underline{ORE\ =} \\ VIVE \end{array}$$

Soluzione: 2625.

La lettera E deve rappresentare 5 (poiché nessuna altra cifra, a parte lo 0 che non è ammesso, moltiplicata per 3 dà un numero con cifra delle unità che coincide con la cifra iniziale); la lettera V deve rappresentare 1 oppure 2 (sommando tre numeri minori di 1000 si ha comunque un numero più piccolo di 3000).

Tenuto conto del riporto che si ha dalla somma delle cifre delle unità, risulta R+R+R+1 = 10k+V con k = 1 oppure k = 2: se fosse V=1, si avrebbe 3R = 10k, il che è impossibile per quanto sappiamo su k. Dunque V = 2 e 3R = 21, cioè R = 7.

Tenuto conto del riporto, si ha O+O+O+2 > 20: quindi O non può valere 6 (la somma varrebbe esattamente 20), non può valere 7 (che è il valore già impegnato per R), non può valere 9 poiché in tal caso anche I dovrebbe valere 9.

Invece, se O vale 8, si ha che I vale 6 e tutte le richieste sono rispettate:

$$\begin{array}{r} 875\ + \\ 875\ + \\ \underline{875\ =} \\ 2625 \end{array}$$

Il ragionamento illustrato dimostra che il problema ammette la sola soluzione trovata.

C6. (*22 punti*) Considera i numeri di 3 cifre le cui cifre possano essere riordinate in modo da formare terne di cifre consecutive (ad es. le cifre di 786 si possono riordinare nella terna 678, costituita da cifre consecutive). Quanti di questi numeri hanno un numero dispari di divisori (diversi fra loro)?

Soluzione: due.

Le terne, elencate in modo che in ciascuna le cifre appaiano in ordine crescente, sono 012 123 234 345 456 567 678 789. Vogliamo appurare quanti, tra i numeri che si possono ottenere permutando le cifre di ognuna di queste terne, sono dei quadrati perfetti: infatti tutti i divisori di un numero, che non ne siano radici quadrate, si presentano a coppie di numeri distinti. Conviene quindi elencare i quadrati da 11^2 = 121 a 31^2 = 961: 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324 = 18^2 (ecco il primo!), 361, 400, 441, 484, 529, 576 = 24^2 (ecco il secondo!), 625, 676, 729, 784, 841, 900.