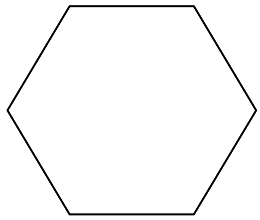
LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddiverlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affemativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi, corredandola dei chiarimenti che ritieni opportuni.



S2. (*7 punti*) Quanto vale la somma algebrica di tutti i coefficienti (ciascuno con il proprio segno) dello sviluppo di $(2x - y + z)^8$?

S3. (*11 punti*) I centri della circonferenza inscritta e di quella circoscritta a un triangolo ottusangolo sono simmetrici rispetto ad uno dei suoi lati. Quanto misura in gradi l'angolo ottuso?

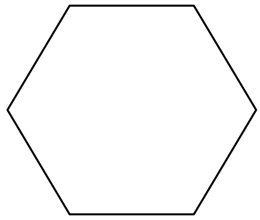
S4. (*14 punti*) Per ogni intero positivo n, si dice "fattoriale di n" - e si indica con il simbolo n! – il prodotto di tutti gli interi da 1 a n incluso, ciascuno considerato una e una sola volta (dunque si ha 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24 e così via). Mostra che il prodotto
$1! \times 2! \times \ldots \times 99! \times 100!$ dei fattoriali dei primi 100 interi positivi non è un quadrato perfetto, ma lo è il suo quoziente con 50!.

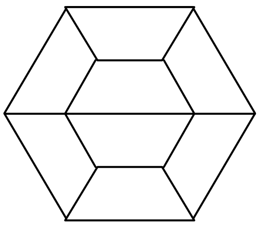
S5. (*18 punti*) Considera una scacchiera 7x7 a cui sono state tolte le 4 caselle d'angolo; chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Dimostra che è possibile disporre 45 numeri interi (non necessariamente tutti diversi fra loro) sulle 45 caselle rimaste, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva. (Suggerimento: individua un insieme convenientemente ridotto S di caselle con la proprietà che ogni croce greca copra almeno una casella appartenente ad S).

S6. (*22 punti*) Siano α e β due circonferenze complanari, ognuna esterna al cerchio individuato dall'altra. Descrivi il luogo dei punti medi dei segmenti [A,B] al variare del punto A in α e del punto B in β.

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddiverlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affemativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi corredandola dei chiarimenti che ritieni opportuni.



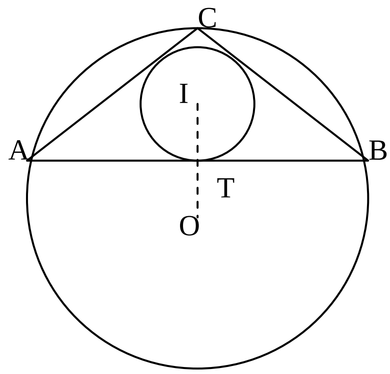


Soluzione. La figura documenta che la suddivisione richiesta è possibile. I trapezi evidenziati, costruiti congiungendo i punti medi dei segmenti che collegano vertici adiacenti al centro, hanno effettivamente le stesse dimensioni: infatti il lato di un esagono regolare è lungo quanto il raggio della circonferenza circoscritta all'esagono stesso.

S2. (*7 punti*) Quanto vale la somma algebrica di tutti i coefficienti (ciascuno con il proprio segno) dello sviluppo di $(2x - y + z)^8$?

Soluzione: 2^8. Il risultato si può ottenere facilmente e velocemente osservando che l'uguaglianza fra la potenza del trinomio e il suo sviluppo è di fatto un'identità, e dunque deve sussistere qualunque terna ordinata di valori venga attribuita alla terna ordinata di parametri (x, y, z). Ciò vale in particolare per la terna (1, 1, 1), in corrispondenza alla quale la componente letterale di ogni monomio presente nello sviluppo vale 1: in questo caso il valore di ogni monomio viene determinato unicamente dal suo coefficiente numerico, portando così il valore della potenza a coincidere con la somma algebrica dei coefficienti dello sviluppo

S3. (*11 punti*) I centri della circonferenza inscritta e di quella circoscritta a un triangolo ottusangolo sono simmetrici rispetto ad uno dei suoi lati. Quanto misura in gradi l'angolo ottuso?



Soluzione: 108°. Poiché il triangolo è ottusangolo, l'intersezione O degli assi dei tre lati del triangolo, centro della circonferenza circoscritta, cade esternamente al triangolo, dalla parte opposta al lato opposto all'angolo ottuso, che chiameremo AB. A causa della simmetria, O e il centro I della circonferenza inscritta determinano un segmento ortogonale ad AB e che, passando per O, giace sull'asse di AB. Questo implica in particolare che, detti R, S, T i punti di tangenza rispettivamente a BC, AC ed AB della circonferenza inscritta, risulta $CA = CS+SA = CS+AT = CS+TB = CS+RB = CR+RB = CB$ e quindi il triangolo è isoscele. Gli angoli CAI e IAB sono congruenti poiché I sta sulla bisettrice di CAB; gli angoli IAB e BAO sono congruenti per la simmetria mentre l'angolo AOC è il supplementare dell'angolo al centro corrispondente all'angolo alla circonferenza ACO. Quindi, denotata con x la misura in gradi di CAI e con y quella di ACO, nel triangolo ACO risulta $3x+y+(180-2y)=180$ e nel triangolo ACT risulta $2x+y=90$ e risolvendo: $x=18$ e $y=54$. Tenendo conto che il triangolo è isoscele si trova quindi che l'angolo BCA misura 108°.

S4. (*14 punti*) Per ogni intero positivo n, si dice "fattoriale di n" - e si indica con il simbolo n! – il prodotto di tutti gli interi da 1 a n incluso, ciascuno considerato una e una sola volta (dunque si ha $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ e così via). Mostra che il prodotto $1! \times 2! \times \ldots \times 99! \times 100!$ dei fattoriali dei primi 100 interi positivi non è un quadrato perfetto, ma lo è il suo quoziente con 50!.

Soluzione. La soluzione che qui proponiamo può essere suggerita dall'osservazione della tabella numerica "triangolare" che si ottiene scrivendo in righe successive i prodotti che definiscono i fattoriali dei primi 100 interi, avendo cura di allineare i fattori uguali in verticale: basterà "accoppiare" la prima riga con la seconda, la terza con la quarta e così via. Sia dunque $2k + 1$ (con $k \geq 0$) un qualunque intero positivo dispari. Indicando con P_{2k+1} il prodotto dei due fattoriali consecutivi $(2k + 1)! \times (2k + 1 + 1)!$, chiaramente si ha

$$P_{2k+1} = 2 \times (k + 1) \times [(2k + 1)!]^2.$$

Il prodotto $P = 1! \times 2! \times \ldots \times 99! \times 100!$ è il prodotto dei 50 numeri P_{2k+1} che si ottengono attribuendo successivamente a $2k + 1$ tutti i valori dispari da 1 a 99 inclusi, dunque dei 50 numeri P_{2k+1} che si ottengono attribuendo successivamente a k tutti i valori interi da 0 a 49 inclusi. In formule si ottiene

$$P = \prod_{k=0,1,\ldots,49} \{ 2 \times (k + 1) \times [(2k + 1)!]^2 \} = 2^{50} \times 50! \times \prod_{k=0,1,\ldots,49} [(2k + 1)!]^2,$$

che sarebbe chiaramente un quadrato perfetto se non vi fosse il fattore 50!. D'altra parte, 50! non è un quadrato perfetto: infatti, scomponendo il prodotto che lo definisce in fattori primi, ve ne sono alcuni, ad esempio 47, che compaiono una volta sola.

S5. (*18 punti*) Considera una scacchiera 7x7 a cui sono state tolte le 4 caselle d'angolo; chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Dimostra che è possibile disporre 45 numeri interi (non necessariamente tutti diversi fra loro) sulle 45 caselle rimaste, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva. (Suggerimento: individua un insieme convenientemente ridotto S di caselle con la proprietà che ogni croce greca copra almeno una casella appartenente ad S).

Soluzione. L'idea è di inserire in alcune caselle della scacchiera, il cui numero indichiamo provvisoriamente con x, il numero 5 e nelle restanti 45 – x il numero –1, in modo che ogni croce greca che si può individuare sulla scacchiera copra almeno una casella cui sia stato assegnato il numero 5. Poiché si vuole che la somma totale dei numeri sulle 45 caselle sia negativa, 5x – (45 - x) deve essere negativo e quindi x non può superare 7: vogliamo che ogni croce greca contenga almeno una di queste 7 caselle cui è stato assegnato il numero 5. Stante il ridotto numero di caselle, occorre "economizzare" la loro scelta: ciò spinge ad evitare che queste caselle siano adiacenti ai bordi della scacchiera, in quanto ogni casella adiacente a un bordo può appartenere ad una sola croce greca. A questo punto le possibilità si riducono drasticamente e si può semplicemente procedere per tentativi. Qui si presenta una configurazione particolarmente simmetrica, ottenuta partendo dal centro della scacchiera e disponendo i restanti sei 5 ai vertici di un esagono.

		5		5		
	5		5		5	
		5		5		

S6. (*22 punti*) Siano α e β due circonferenze complanari, ognuna esterna al cerchio individuato dall'altra. Descrivi il luogo dei punti medi dei segmenti [A,B] al variare del punto A in α e del punto B in β.

Soluzione: una corona circolare, eventualmente un cerchio (se i raggi di α e β sono uguali). Chiamiamo C_α e r_α rispettivamente il centro e il raggio di α e C_β e r_β. quelli di β. Iniziamo esponendo l'idea, che formalizzeremo subito dopo. Fissiamo un punto A in α: non è difficile appurare che il luogo dei punti medi del segmento [A,B] al variare di B in β è la circonferenza γ_A di raggio $r_\beta/2$ centrata nel punto medio del segmento $[A,C_\beta]$. Si tratta ora di unire i luoghi γ_A al variare di A in α: si ottiene la corona circolare con centro nel punto medio del segmento $[C_\alpha,C_\beta]$ e raggi

$$|r_\alpha - r_\beta|/2 \quad \text{e} \quad (r_\alpha + r_\beta)/2 \ .$$

Per formalizzare quanto sopra, possiamo scegliere l'approccio geometrico, lavorando per similitudini, o l'approccio algebrico, che consente scritture compatte: scegliamo il secondo. Dotiamo il piano di un riferimento cartesiano ortogonale. Se σ e τ sono due sottoinsiemi del piano, conveniamo di indicare con $\sigma + \tau$ l'insieme dei punti S + T al variare di S in σ e di T in τ (la somma S + T dei due punti S e T è il punto che costituisce il quarto vertice del parallelogramma, degenere se S e T sono allineati con l'origine, tre vertici del quale sono l'origine e i punti S e T; dunque ha per coordinate le somme delle coordinate omologhe). Analogamente, se k è un numero reale, conveniamo di indicare con $k\sigma$ l'insieme dei punti kS al variare di S in σ (dove kS indica il punto le cui coordinate sono ordinatamente quelle di S moltiplicate per k). Con queste notazioni, il punto medio del segmento di estremi S e T è chiaramente il punto S/2 + T/2. Si noti che, in generale, l'insieme $\sigma + \sigma$ contiene l'insieme 2σ, ma non coincide necessariamente con esso.
Senza ledere la generalità, possiamo assumere che C_α sia l'origine degli assi. Se chiamiamo γ la circonferenza centrata nell'origine di raggio r_β, possiamo scrivere $\beta = C_\beta + \gamma$. Fissato A in α, il luogo dei punti medi di [A,B] al variare di B in β è allora la circonferenza $A/2 + C_\beta/2 + \gamma/2$ (in questa scrittura, i simboli A e C_β denotano anche gli insiemi costituiti rispettivamente dal solo punto A e dal solo punto C_β). Facendo variare ora A in α, si ottiene il luogo

$$C_\beta/2 + \alpha/2 + \gamma/2$$

che è appunto quanto preventivato. Per convincersene, basta tenere conto del fatto che le circonferenze α e γ sono concentriche e, ricordando quanto detto sopra sulla posizione nel piano del punto somma di due punti, studiare il luogo dei vertici opposti all'origine dei parallelogrammi aventi un vertice nell'origine, uno su $\alpha/2$ e uno su $\gamma/2$.