Kangourou della Matematica 2005
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2005

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Cinque ragazze, tra cui Silvia, hanno comperato alcuni lacci per capelli. Si sa che:

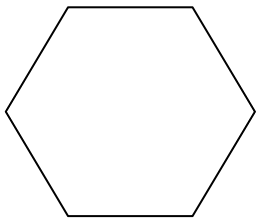
- non vi sono due di loro che abbiano comperato lo stesso numero di lacci;
- il numero di lacci comperati da tre qualunque di loro è maggiore di quello comprato dalle restanti due.

Qual è il minimo numero di lacci che può avere comprato Silvia? Motiva la risposta.

J2. (*7 punti*) Nella moltiplicazione indicata a fianco, oltre al 6 sono stati usati due numeri interi, UN e BIO, composti utilizzando complessiva-mente le cifre 2, 3, 4, 5, 7. Se lettere diverse rappresentano cifre diverse, quanto vale B + I + N + O ?

$$\begin{array}{r} U\,N \times \\ 6 = \\ \hline B\,I\,O \end{array}$$

J3. (*11 punti*) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddiverlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affemativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi corredandola dei chiarimenti che ritieni opportuni.



J4. (*14 punti*) Quanto vale la somma algebrica di tutti i coefficienti (ciascuno con il proprio segno) dello sviluppo di $(2x - y + z)^8$?

J5. (*18 punti*) Per ogni intero positivo n, si dice "fattoriale di n" - e si indica con il simbolo n! – il prodotto di tutti gli interi da 1 a n incluso, ciascuno considerato una e una sola volta (dunque si ha 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24 e così via). Mostra che il prodotto
$1! \times 2! \times \ldots \times 99! \times 100!$ dei fattoriali dei primi 100 interi positivi non è un quadrato perfetto, ma lo è il suo quoziente con 50!.

J6. (*22 punti*) Considera una scacchiera 7x7 a cui sono state tolte le 4 caselle d'angolo; chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Dimostra che è possibile disporre 45 numeri interi (non necessariamente tutti diversi fra loro) sulle 45 caselle rimaste, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva. (Suggerimento: individua un insieme convenientemente ridotto S di caselle con la proprietà che ogni croce greca copra almeno una casella appartenente ad S).

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Cinque ragazze, tra cui Silvia, hanno comperato alcuni lacci per capelli. Si sa che:

- non vi sono due di loro che abbiano comperato lo stesso numero di lacci;
- il numero di lacci comperati da tre qualunque di loro è maggiore di quello comprato dalle restanti due.

Qual è il minimo numero di lacci che può avere comprato Silvia? Motiva la risposta

Soluzione: 5. Infatti, quali che siano i cinque numeri interi, tutti diversi fra loro, che indicano i lacci comprati dalle singole ragazze, possiamo immaginarli ordinati in sequenza dal più piccolo al più grande: la differenza fra ciascuno (dal secondo in poi) e il precedente è almeno 1, per cui la somma degli ultimi due supera di almeno 4 la somma del secondo con il terzo; il primo numero deve essere comunque tale che, sommato con il secondo e con il terzo, deve consentire di superare la somma degli ultimi due, per cui non può essere inferiore a 5. D'altra parte, se i 5 numeri fossero per esempio 5, 6, 7, 8 e 9, le nostre richieste sarebbero rispettate, per cui è effettivamente possibile che una delle cinque ragazze abbia comprato solo 5 lacci e che questa sia proprio Silvia.

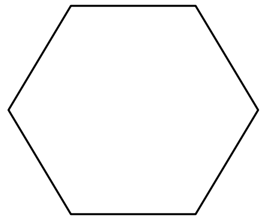
Usando il calcolo letterale, possiamo tradurre il precedente procedimento come segue.
Dovendo trovare il minimo numero di lacci comprato da Silvia, possiamo supporre che delle 5 sia lei quella che ne ha comprato di meno: diciamo x tale numero. Le altre ragazze ne hanno allora comprato $x + a$, $x + a + b$, $x + a + b + c$, $x + a + b + c + d$ (dove a, b, c, d sono non minori di 1, visto che nessuna di loro ha comprato lo stesso numero di lacci delle altre). La somma dei tre numeri più piccoli supera allora la somma dei due più grandi se e solo se
$3x + 2a + b > 2x + 2a + 2b + 2c + d$, cioè $x > b + 2c + d \geq 4$.

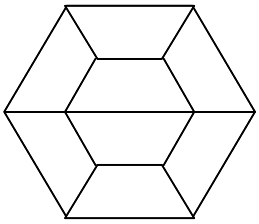
J2. (*7 punti*) Nella moltiplicazione indicata a fianco, oltre al 6 sono stati usati due numeri interi, UN e BIO, composti utilizzando complessivamente le cifre 2, 3, 4, 5, 7. Se lettere diverse rappresentano cifre diverse, quanto vale B + I + N + O ?

$$\begin{array}{r} U\,N\ \times \\ 6\ = \\ \hline B\,I\,O \end{array}$$

Soluzione: UN = 57, BIO = 342 e quindi B + I + N + O = 3 + 4 + 7 + 2 = 16. Infatti O deve essere una cifra pari, dunque 2 o 4: tenendo conto che il prodotto $6 \times N$ deve terminare per O e che O e N devono essere diversi fra loro, non può che essere O = 2 e N = 7. Allora per I, U e B, da determinarsi nell'ordine, rimangono come unica possibilità rispettivamente 4, 5 e 3.

J3. (*11 punti*) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddiverlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affemativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi corredandola dei chiarimenti che ritieni opportuni.





Soluzione. La figura documenta che la suddivisione richiesta è possibile. I trapezi evidenziati, costruiti congiungendo i punti medi dei segmenti che collegano vertici adiacenti al centro, hanno effettivamente le stesse dimensioni: infatti il lato di un esagono regolare è lungo quanto il raggio della circonferenza circoscritta all'esagono stesso.

J4. (*14 punti*) Quanto vale la somma algebrica di tutti i coefficienti (ciascuno con il proprio segno) dello sviluppo di $(2x - y + z)^8$?

Soluzione: 2^8. Il risultato si può ottenere facilmente e velocemente osservando che l'uguaglianza fra la potenza del trinomio e il suo sviluppo è di fatto un'identità, e dunque deve sussistere qualunque terna ordinata di valori venga attribuita alla terna ordinata di parametri (x, y, z). Ciò vale in particolare per la terna $(1, 1, 1)$, in corrispondenza alla quale la componente letterale di ogni monomio presente nello sviluppo vale 1: in questo caso il valore di ogni monomio viene determinato unicamente dal suo coefficiente numerico, portando così il valore della potenza a coincidere con la somma algebrica dei coefficienti dello sviluppo.

J5. (*18 punti*) Per ogni intero positivo n, si dice "fattoriale di n" - e si indica con il simbolo n! – il prodotto di tutti gli interi da 1 a n incluso, ciascuno considerato una e una sola volta (dunque si ha $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ e così via). Mostra che il prodotto $1! \times 2! \times \dots \times 99! \times 100!$ dei fattoriali dei primi 100 interi positivi non è un quadrato perfetto, ma lo è il suo quoziente con 50!.

Soluzione. La soluzione che qui proponiamo può essere suggerita dall'osservazione della tabella numerica "triangolare" che si ottiene scrivendo in righe successive i prodotti che definiscono i fattoriali dei primi 100 interi, avendo cura di allineare i fattori uguali in verticale: basterà "accoppiare" la prima riga con la seconda, la terza con la quarta e così via. Sia dunque $2k + 1$ (con $k \geq 0$) un qualunque intero positivo dispari. Indicando con P_{2k+1} il prodotto dei due fattoriali consecutivi $(2k + 1)! \times (2k + 1 + 1)!$, chiaramente si ha

$$P_{2k+1} = 2 \times (k + 1) \times [(2k + 1)!]^2.$$

Il prodotto $P = 1! \times 2! \times \dots \times 99! \times 100!$ è il prodotto dei 50 numeri P_{2k+1} che si ottengono attribuendo successivamente a $2k + 1$ tutti i valori dispari da 1 a 99 inclusi, dunque dei 50 numeri P_{2k+1} che si ottengono attribuendo successivamente a k tutti i valori interi da 0 a 49 inclusi. In formule si ottiene

$$P = \prod_{k=0,1,\dots,49} \{ 2 \times (k + 1) \times [(2k + 1)!]^2 \} = 2^{50} \times 50! \times \prod_{k=0,1,\dots,49} [(2k + 1)!]^2,$$

che sarebbe chiaramente un quadrato perfetto se non vi fosse il fattore 50!. D'altra parte, 50! non è un quadrato perfetto: infatti, scomponendo il prodotto che lo definisce in fattori primi, ve ne sono alcuni, ad esempio 47, che compaiono una volta sola.

J6. (*22 punti*) Considera una scacchiera 7x7 a cui sono state tolte le 4 caselle d'angolo; chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Dimostra che è possibile disporre 45 numeri interi (non necessariamente tutti diversi fra loro) sulle 45 caselle rimaste, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva. (Suggerimento: individua un insieme convenientemente ridotto S di caselle con la proprietà che ogni croce greca copra almeno una casella appartenente ad S).

Soluzione. L'idea è di inserire in alcune caselle della scacchiera, il cui numero indichiamo provvisoriamente con x, il numero 5 e nelle restanti $45 - x$ il numero -1, in modo che ogni croce greca che si può individuare sulla scacchiera copra almeno una casella cui sia stato assegnato il numero 5. Poiché si vuole che la somma totale dei numeri sulle 45 caselle sia negativa, $5x - (45 - x)$ deve essere negativo e quindi x non può superare 7: vogliamo che ogni croce greca contenga almeno una di queste 7 caselle cui è stato assegnato il numero 5. Stante il ridotto numero di caselle, occorre "economizzare" la loro scelta: ciò spinge ad evitare che queste caselle siano adiacenti ai bordi della scacchiera, in quanto ogni casella adiacente a un bordo può appartenere ad una sola croce greca. A questo punto le possibilità si riducono drasticamente e si può semplicemente procedere per tentativi. Qui si presenta una configurazione particolarmente simmetrica, ottenuta partendo dal centro della scacchiera e disponendo i restanti sei 5 ai vertici di un esagono.

		5		5		
	5		5		5	
		5		5		