



Kangourou della Matematica 2005
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2005



LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Chiamiamo "numero di Matteo" un numero di quattro cifre tale che il prodotto delle prime due cifre sia uguale alla somma delle ultime due. Per esempio 1990 è un numero di Matteo ($1 \times 9 = 9 + 0$), così come lo sono 2351 o 5387. Quali sono i tre numeri di Matteo più grandi?

B2. (7 punti) Un geometra doveva delimitare una porzione di terreno in modo da ottenere un quadrato di lato 2005 m. Il primo lato delimitato è perpendicolare al secondo e il secondo al terzo, ma, per errore, misurano nell'ordine 2005 m, 2006 m, 2007 m (cioè il lato che misura 2005 m è opposto a quello che misura 2007 m). Se il quarto lato del poligono viene tracciato congiungendo i due vertici rimasti liberi, di quanti metri quadrati la porzione delimitata risulta più grande del previsto?

B3. (11 punti) Prima che venisse impiegato il lettore ottico, le schede-risposta di Kangourou venivano esaminate a mano. Un correttore umano esaminava in media 2 schede al minuto. Alle undici del mattino di un dato giorno aveva esaminato la metà delle schede che gli erano state assegnate per quel giorno. A mezzogiorno ne aveva esaminati i due terzi. Se non si fosse mai fermato e avesse continuato allo stesso ritmo, quante schede gli sarebbero rimaste da esaminare alla una di pomeriggio di quel giorno?

B4. (14 punti) Cinque ragazze, tra cui Silvia, hanno comperato alcuni lacci per capelli. Si sa che:

- non vi sono due di loro che abbiano comperato lo stesso numero di lacci;
- il numero di lacci comperati da tre qualunque di loro è maggiore di quello comperato dalle restanti due.

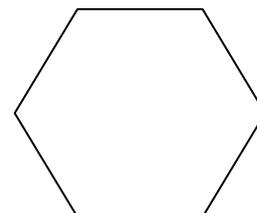
Qual è il minimo numero di lacci che può avere comperato Silvia? Motiva la risposta.

B5. (18 punti) In un'urna vi sono 35 palline. Compriamo delle estrazioni successive seguendo rigorosamente questa procedura:

- alla prima estrazione si prende una pallina;
- a ogni successiva estrazione (ultima inclusa) va presa una pallina in più o una in meno rispetto all'estrazione precedente.

Qual è il numero minimo di estrazioni sufficiente perché l'urna resti vuota? Motiva la risposta.

B6. (22 punti) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddividerlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affermativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi.





Kangourou della Matematica 2005
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2005



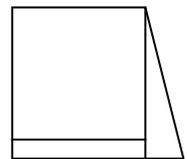
LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Chiamiamo "numero di Matteo" un numero di quattro cifre tale che il prodotto delle prime due cifre sia uguale alla somma delle ultime due. Per esempio 1990 è un numero di Matteo ($1 \times 9 = 9 + 0$), così come lo sono 2351 o 5387. Quali sono i tre numeri di Matteo più grandi?

Soluzione: 9299, 9190 e 9181. Dati due numeri diversi con lo stesso numero di cifre, il loro confronto può essere fatto basandosi esclusivamente sulla prima cifra, partendo da sinistra, che risulta diversa. Conviene procedere per tentativi e dunque iniziare ponendo la prima cifra uguale a 9. Così facendo, dal momento che la somma di due cifre non può comunque superare $18 = 9 \times 2$, la seconda cifra non potrà essere che 2 o 1. Otteniamo così subito il numero più grande, 9299, l'unico avente 2 come seconda cifra. A questo punto, prendendo 1 come seconda cifra, i due numeri più grandi sono 9190 e 9181.

B2. (7 punti) Un geometra doveva delimitare una porzione di terreno in modo da ottenere un quadrato di lato 2005 m. Il primo lato delimitato è perpendicolare al secondo e il secondo al terzo, ma, per errore, misurano nell'ordine 2005 m, 2006 m, 2007 m (cioè il lato che misura 2005 m è opposto a quello che misura 2007 m). Se il quarto lato del poligono viene tracciato congiungendo i due vertici rimasti liberi, di quanti metri quadrati la porzione delimitata risulta più grande del previsto?

Soluzione: 4011 m^2 . La porzione delimitata è di fatto un trapezio rappresentabile unendo, senza sovrapporli, un quadrato di lato 2005 m (quello voluto), un rettangolo di lati 1 m e 2005 m e un triangolo rettangolo di cateti 2006 m e 2 m. Queste due ultime figure costituiscono l'eccedenza rispetto a quanto previsto e la somma delle loro aree vale $2005 + 2006 = 4011 \text{ m}^2$.



B3. (11 punti) Prima che venisse impiegato il lettore ottico, le schede-risposta di Kangourou venivano esaminate a mano. Un correttore umano esaminava in media 2 schede al minuto. Alle undici del mattino di un dato giorno aveva esaminato la metà delle schede che gli erano state assegnate per quel giorno. A mezzogiorno ne aveva esaminati i due terzi. Se non si fosse mai fermato e avesse continuato allo stesso ritmo, quante schede gli sarebbero rimaste da esaminare alla una di pomeriggio di quel giorno?

Soluzione: 120. Alle 12 il correttore aveva esaminato $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ di schede in più rispetto alle 11 e questo "sesto" corrisponde a $2 \times 60 = 120$ schede. Per concludere il lavoro, alle 12 mancavano ancora i $\frac{2}{6}$ delle schede e un'ora dopo $\frac{1}{6}$, pari dunque a 120 schede.

B4. (14 punti) Cinque ragazze, tra cui Silvia, hanno comperato alcuni lacci per capelli. Si sa che:

- non vi sono due di loro che abbiano comperato lo stesso numero di lacci;
- il numero di lacci comperati da tre qualunque di loro è maggiore di quello comprato dalle restanti due.

Qual è il minimo numero di lacci che può avere comprato Silvia? Motiva la risposta.

Soluzione: 5. Infatti, quali che siano i cinque numeri interi, tutti diversi fra loro, che indicano i lacci comprati dalle singole ragazze, possiamo immaginarli ordinati in sequenza dal più piccolo al più grande: la differenza fra ciascuno (dal secondo in poi) e il precedente è almeno 1, per cui la somma degli ultimi due supera di almeno 4 la somma del secondo con il terzo; il primo numero deve essere comunque tale che, sommato con il secondo e con il terzo, deve consentire di superare la somma degli ultimi due, per cui non può essere inferiore a 5. D'altra parte, se i 5 numeri fossero per esempio 5, 6, 7, 8 e 9, le nostre richieste sarebbero rispettate, per cui è effettivamente possibile che una delle cinque ragazze abbia comprato solo 5 lacci e che questa sia proprio Silvia.

B5. (18 punti) In un'urna vi sono 35 palline. Compriamo delle estrazioni successive seguendo rigorosamente questa procedura:

- alla prima estrazione si prende una pallina;
- a ogni successiva estrazione (ultima inclusa) va presa una pallina in più o una in meno rispetto all'estrazione precedente.

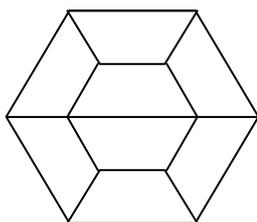
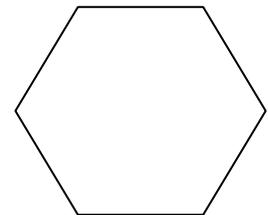
Qual è il numero minimo di estrazioni sufficiente perché l'urna resti vuota? Motiva la risposta.

Soluzione: 9. Non bastano 7 estrazioni, poiché al massimo si potrebbero estrarre
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ palline.

Non ne bastano neppure 8, poiché $28 + 8 = 36$ mentre $28 + 6 = 34$, il che significa che, se ad anche una sola delle estrazioni estraessimo una pallina in meno rispetto all'estrazione precedente anziché una in più, non arriveremmo a svuotare l'urna.

D'altra parte 9 estrazioni sono sufficienti: basta estrarre, per esempio, nell'ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 5 palline, oppure 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5 palline.

B6. (22 punti) In figura vedi un esagono regolare. Puoi suddividerlo in 8 parti di ugual forma e dimensioni? In caso di risposta negativa devi motivarla, in caso di risposta affermativa, illustra direttamente sulla figura la suddivisione che proponi.



Soluzione. La figura documenta che la suddivisione richiesta è possibile. I trapezi evidenziati, costruiti congiungendo i punti medi dei segmenti che collegano vertici adiacenti al centro, hanno effettivamente le stesse dimensioni: infatti il lato di un esagono regolare è lungo quanto il raggio della circonferenza circoscritta all'esagono stesso.