Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO STUDENT

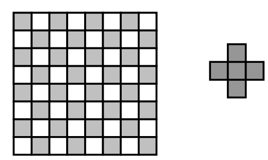
S1. *(5 punti)* Per quali coppie (x, y) di numeri interi relativi è vero che $|x^2 - 3y^2 + 2xy| = 1$?

S2. *(7 punti)* Sono date nel piano una circonferenza β il cui raggio misura $\sqrt{2}$ centimetri ed una circonferenza γ il cui raggio misura 2 centimetri e il cui centro C appartiene a β. Calcolare l'area della regione interna a β ed esterna a γ.

S3. *(11 punti)* Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:

- ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
- le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.

Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?



S4. *(14 punti)* Un calcolatore esegue le seguenti istruzioni: (**1**) inizializza X a 3 e S a 0, (**2**) aumenta il valore di X di 2, (**3**) aumenta il valore di S del valore di X, (**4**) se S ha almeno 5 cifre vai all'istruzione (5) altrimenti vai all'istruzione (2) e ricomincia a partire da quella posizione, (**5**) stampa il valore di X e finisci. Quale sarà il valore di X che verrà stampato al passo (5)?

S5. *(18 punti)* Supponi di sapere che (per n = 1,2,…) a_n è il quadrato di un intero non nullo e la differenza $a_{n+1} - a_n$ è un numero primo (positivo) oppure il quadrato di un numero primo. Dimostra che tutte le possibili sequenze $\{a_n\}$ che soddisfano questi requisiti sono finite e determina la più lunga.

S6. *(22 punti)* Considera un punto P interno ad un tetraedro regolare di lato 1. Mostra che la somma delle distanze di P dai sei spigoli del tetraedro non è inferiore a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e individua gli eventuali punti P in corrispondenza ai quali tale somma vale esattamente $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

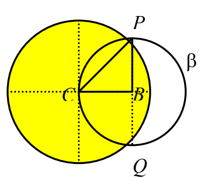
LIVELLO STUDENT

S1. *(5 punti)* Per quali coppie (x, y) di numeri interi relativi è vero che $|x^2 - 3y^2 + 2xy| = 1$?

Soluzione. Si ha $x^2 - 3y^2 + 2xy = (x + y)^2 - 4y^2 = (x - y)(x + 3y)$. Nel nostro caso questi due fattori possono assumere solo valori interi, dunque, per noi, 1 o – 1. I due casi in cui sono di segno discorde con facili calcoli forniscono $|x| = |y| = ½$, dunque non sono accettabili. Sempre con facili calcoli, ponendoli entrambi uguali a 1, otteniamo la coppia (1,0); ponendoli entrambi uguali a – 1, otteniamo la coppia (– 1,0).

S2. *(7 punti)* Sono date nel piano una circonferenza β il cui raggio misura $\sqrt{2}$ cm ed una circonferenza γ il cui raggio misura 2 cm e il cui centro C appartiene a β. Calcolare l'area della regione interna a β ed esterna a γ.

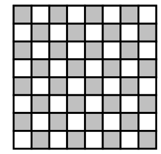
Soluzione.

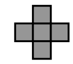


Siano P e Q i due punti di intersezione fra β e γ. Osserviamo che la corda PQ contiene il centro B di β (e quindi ne è un diametro): infatti, i triangoli isosceli PBC e QBC sono rettangoli in B in quanto $|PC| = |CQ| = 2$ e $|BC| = |BP| = |BQ| = \sqrt{2}$. Dunque la regione di cui si cerca l'area si ottiene togliendo dal semicerchio delimitato da β ed esterno a γ il minore dei 2 segmenti circolari di γ aventi corda PQ. Quest'ultimo è la differenza tra il settore circolare PCQ e il triangolo PCQ, rettangolo in C. Allora l'area cercata vale, in centimetri quadrati,

$$(1/2)\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - [(1/4)\cdot\pi\cdot 2^2 - 2^2/2] = 2.$$

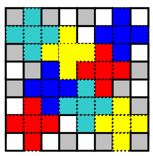
S3. *(11 punti)* Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:





- ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
- le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.

Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?



Soluzione. È ovvio che, per ogni lato della scacchiera, sono al massimo due le caselle adiacenti quel lato che possono venire coperte da qualche tessera. Quindi non più di $2\cdot 4 + 6\cdot 6 = 44$ caselle della scacchiera possono essere coperte, il che (coprendo ogni tessera 5 caselle e non potendo le tessere sovrapporsi) significa che la scacchiera non può ospitare più di 8 (=quoziente di 44:5) tessere. In effetti 8 tessere possono essere collocate, come mostra la figura.

S4. *(14 punti)* Un calcolatore esegue le seguenti istruzioni: (**1**) inizializza X a 3 e S a 0, (**2**) aumenta il valore di X di 2, (**3**) aumenta il valore di S del valore di X, (**4**) se S ha almeno 5 cifre vai all'istruzione (5) altrimenti vai all'istruzione (2) e ricomincia a partire da quella posizione, (**5**) stampa il valore di X e finisci. Quale sarà il valore di X che verrà stampato al passo (5)?

Soluzione. Le istruzioni si traducono così: $X_0=3$, $S_0=0$, $X_{n+1}=X_n+2$, $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$. Quindi $X_{n+1}=3+2n$ e $S_{n+1}=X_1+\ldots+X_{n+1}=3(n+1)+2(1+\ldots+n)=3(n+1)+n(n+1)=(3+n)(n+1)\geq 10000$ se $n\geq 99$ (infatti $(98+1)(98+3)=9999$) e quindi $X=10200$.

S5. *(18 punti)* Supponi di sapere che (per $n = 1,2,\ldots$) a_n è il quadrato di un intero non nullo e la differenza $a_{n+1} - a_n$ è un numero primo (positivo) oppure il quadrato di un numero primo. Dimostra che tutte le possibili sequenze $\{a_n\}$ che soddisfano questi requisiti sono finite e determina la più lunga.

Soluzione. Scriviamo $a_n = b_n^2$ con b_n intero positivo. La differenza

$$a_{n+1} - a_n = (b_{n+1} - b_n)(b_{n+1} + b_n)$$

deve essere un primo o il quadrato di un primo: essendo i due fattori a secondo membro diversi, deve essere $b_{n+1} - b_n = 1$. Allora, per ogni n per cui è definito a_n, deve aversi $b_{n+1} = b_1 + n$ e quindi

- $a_{n+1} = (b_1 + n)^2$
- $a_{n+1} - a_n = 2b_1 + 2n - 1$.

Ne segue che $\{a_{n+1} - a_n\}$ è una sequenza di interi dispari consecutivi il cui primo termine è ≥ 3. La sequenza 3, 5, 7, 9, 11, 13, ottenuta per $b_1=1$, è fatta da numeri che o sono primi o sono quadrato di un primo: dunque è accettabile per $\{a_{n+1} - a_n\}$ e fornisce per $\{a_n\}$ la sequenza 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 di lunghezza 7. D'altra parte, a partire da 15, un intero dispari ogni 3 è multiplo proprio di 3 e non ne è il quadrato: non può dunque essere primo né il quadrato di alcun numero primo: quindi la sequenza trovata non è prolungabile e non se ne può trovare una più lunga.

S6. *(22 punti)* Considera un punto P interno ad un tetraedro regolare di lato 1. Mostra che la somma delle distanze di P dai sei spigoli del tetraedro non è inferiore a $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e individua gli eventuali punti P in corrispondenza ai quali tale somma vale esattamente $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Soluzione. I quattro vertici del tetraedro regolare stanno nei vertici "alterni" di un cubo di lato $(\sqrt{2})/2$. La distanza di P da ciascuno degli spigoli l non è inferiore alla distanza di P dalla faccia del cubo che contiene l: la somma delle distanze di P da due facce opposte è $(\sqrt{2})/2$ e quindi rifacendo lo stesso ragionamento per ciascuna delle tre coppie di spigoli del tetraedro giacenti su facce opposte si ha che la somma delle distanze di P dai sei spigoli del tetraedro non è inferiore a $(3\sqrt{2})/2$.
Il baricentro B del tetraedro è uno dei punti in corrispondenza ai quali tale somma vale esattamente $(3\sqrt{2})/2$: infatti, avendo uguale distanza dai vertici, deve coincidere con il baricentro del cubo, la cui distanza da ciascuno spigolo del tetraedro è esattamente $(\sqrt{2})/2$ (poiché la normale da B alle facce del cubo cade esattamente sulle loro diagonali, tra le quali ci sono gli spigoli del tetraedro).
Questa è l'unica posizione in cui si realizza l'uguaglianza. Infatti, consideriamo il generico spigolo l del tetraedro: affinché valga l'uguaglianza, occorre che la distanza di P da l sia uguale alla sua distanza dalla faccia F del cubo che ospita l, per cui P deve appartenere al piano ortogonale a F passante per l. Al variare di l, l'intersezione dei piani così individuati si riduce al solo baricentro.