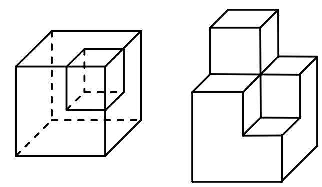
Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO CADET

C1. *(5 punti)* In un cubo di legno di 4 decimetri di lato si taglia un cubo di due decimetri di lato per fabbricare il solido raffigurato a destra nella figura. Rispetto alla superficie totale del cubo iniziale, di quanti decimetri quadrati è maggiore la superficie totale esterna del solido?

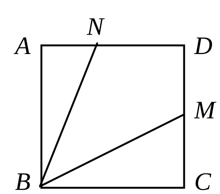


C2. *(7 punti)* Il numero a è un intero positivo tale che la somma $a + 2a + 3a + 4a + \ldots + 9a$ è un numero in cui tutte le cifre sono uguali. Qual è il minimo valore di a?

C3. *(11 punti)* Alla fine di un torneo di pallavolo con un solo girone all'italiana (dove ogni squadra incontra una sola volta tutte le altre), esiste sempre almeno una squadra A che negli incontri con ogni altra squadra B o ha vinto o ha battuto una squadra che ha battuto B? Motiva la risposta. (N.B. nella pallavolo nessuna partita si conclude in parità).

C4. *(14 punti)* Ho scritto su 5 foglietti altrettanti numeri interi positivi. Sommandoli a due a due in tutti i modi possibili, ottengo i seguenti dieci risultati: 17, 20, 28, 14, 36, 28, 25, 31, 39 e 42. Quali numeri ho scritto?

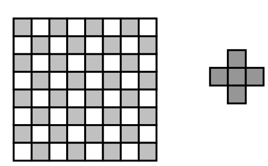
C5. *(18 punti)* Il lato del quadrato in figura misura 6 cm e i segmenti AN e CM misurano rispettivamente 2 cm e 3 cm. Quanti gradi misura l'angolo NBM?



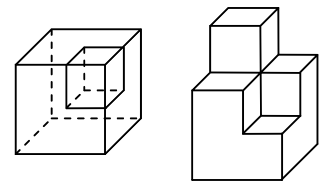
C6. *(22 punti)* Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:

- ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
- le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.

Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?



LIVELLO CADET



C1. *(5 punti)* In un cubo di legno di 4 decimetri di lato si taglia un cubo di due decimetri di lato per fabbricare il solido raffigurato a destra nella figura. Rispetto alla superficie totale del cubo iniziale, di quanti decimetri quadrati è maggiore la superficie totale esterna del solido?

Soluzione. Le facce scavate nel cubo sono equivalenti a quelle rimosse dalle 3 facce che sono state alterate; la faccia superiore del cubetto rimosso equivale alla regione che viene rimossa dalla faccia superiore; non hanno corrispondente nel cubo vecchio solo le 4 facce laterali del cubetto rimosso. Quindi la superficie totale esterna del solido è maggiore della superficie totale del cubo di $4\times(2\times2)=16$ decimetri quadrati.

C2. *(7 punti)* Il numero a è un intero positivo tale che la somma $a + 2a + 3a + 4a + \ldots + 9a$ è un numero in cui tutte le cifre sono uguali. Qual è il minimo valore di a?

Soluzione. Infatti il numero proposto ha somma $45a$: è quindi divisibile per 9 e per 5. Un numero è divisibile per 5 se la sua cifra delle unità è 0 o 5: dovendo essere le cifre tutte uguali saranno tutti 5. Inoltre se è divisibile per 9, la somma delle sue cifre deve essere divisibile per 9: ciò si verifica solo se il numero contiene un numero di cifre pari a un multiplo di 9. Quindi il minimo numero che soddisfa queste due condizioni è 555555555: esso diviso 45 dà 12345679. Quindi a=12345679.
Attenzione: andrebbe bene qualunque altro numero soddisfacente a queste due condizioni, se non si chiedesse MINIMO!

C3. *(11 punti)* Alla fine di un torneo di pallavolo con un solo girone all'italiana (dove ogni squadra incontra una sola volta tutte le altre), esiste sempre almeno una squadra A che negli incontri con ogni altra squadra B o ha vinto o ha battuto una squadra che ha battuto B? Motiva la risposta. (N.B. nella pallavolo nessuna partita si conclude in parità).

Soluzione. Ogni squadra A a punteggio massimo è in questa condizione. Infatti, se A non avesse battuto B e non avesse battuto alcuna delle squadre che hanno battuto B (cioè se A è stata battuta, oltre che da B, anche da tutte le squadre che hanno battuto B) il punteggio di A sarebbe sicuramente inferiore a quello di B.

C4. *(14 punti)* Ho scritto su 5 foglietti altrettanti numeri interi positivi. Sommandoli a due a due in tutti i modi possibili, ottengo i seguenti dieci risultati: 17, 20, 28, 14, 36, 28, 25, 31, 39 e 42. Quali numeri ho scritto?

Soluzione. Denotiamo i 5 numeri con a, b, c, d, e. Se

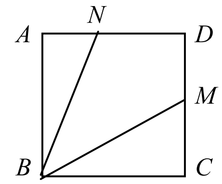
$$a \leq b \leq c \leq d \leq e,$$

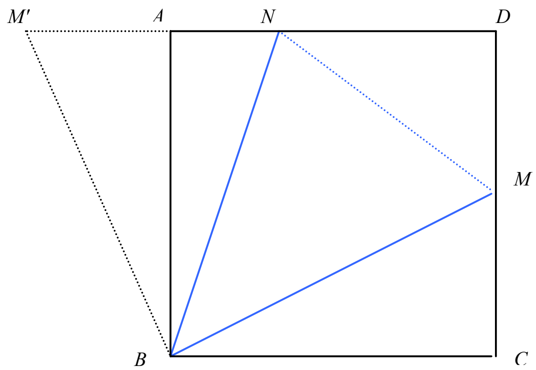
allora $a+b \leq a+c$ e queste sono le 2 somme più piccole e $c+d \leq c+e$ e queste sono le 2 somme più grandi. Scriviamo le 10 somme in ordine crescente: 14, 17, 20, 25 ,28, 28, 31, 36, 39, 42. Allora deve essere:

$$a+b = 14,\ a+c = 17,\ d+e = 42,\ c+e = 39.$$

Se sommiamo fra loro le 10 somme, otteniamo 280 e questo numero coincide con $4(a+b+c+d+e)$, per cui la somma dei 5 numeri che cerchiamo vale 70. Da $a+b = 14$ e $d+e = 42$ segue $c = 14$. Allora i 5 numeri sono 3, 11, 14, 17, 25.

C5. *(18 punti)* Il lato del quadrato in figura misura 6 cm e i segmenti AN e CM misurano rispettivamente 2 cm e 3 cm. Quanti gradi misura l'angolo NBM?



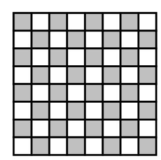


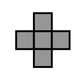
Soluzione. L'angolo misura 45°. Infatti ruotando il triangolo BCM di 90° intorno al vertice B in verso antiorario si ha un triangolo rettangolo il cui cateto maggiore è sovrapposto al lato AB e il cateto minore è allineato con AN. Detto M' il trasformato di M, si ha che $M'BN$ è uguale a MBN, in quanto $M'B$ è uguale a MB, $M'N$ è lungo 5 cm, come NM (teorema di Pitagora) e il lato BN è comune. Dunque i due angoli $M'BN$ e NBM sono uguali e, visto che la loro somma misura 90°, ognuno misura 45°.

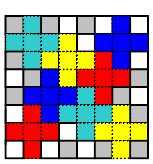
C6. *(22 punti)* Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:

- ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
- le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.

Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?







Soluzione. È ovvio che, per ogni lato della scacchiera, sono al massimo due le caselle adiacenti quel lato che possono venire coperte da qualche tessera. Quindi non più di $2 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 44$ caselle della scacchiera possono essere coperte, il che (coprendo ogni tessera 5 caselle e non potendo le tessere sovrapporsi) significa che la scacchiera non può ospitare più di 8 (=quoziente di 44:5) tessere. In effetti 8 tessere possono essere collocate, come mostra la figura.