Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO BENJAMIN

B1. *(5 punti)* Sei naufragato sulla spiaggia di Mirabilandia che è abitata da due famiglie di pirati: quella dei Sinceri (che dicono sempre la verità) e quella dei Bugiardi (che mentono sempre). Incontri due pirati di nome Martedì e Mercoledì e vorresti sapere per ciascuno di loro a quale famiglia appartiene. Martedì afferma “noi apparteniamo a due famiglie diverse”, ma Mercoledì ribatte “non è vero!”. Che cosa concludi?

B2. *(7 punti)* Stefano e Giovanni hanno a disposizione una corda rossa ed una blu (lunghe più di 20 centimetri). Essi intendono giocare nel modo seguente: a turno taglieranno da una delle estremità di una delle due corde uno spezzone che dovrà essere lungo 4 centimetri se il giocatore sceglie la corda rossa oppure 5 centimetri se il giocatore sceglie la corda blu. Perderà il primo dei due che non potrà più effettuare il taglio, cioè che si ritroverà con la corda rossa lunga meno di 4 centimetri e la corda blu lunga meno di 5 centimetri. Inizierà il gioco Stefano. In che modo, conoscendo la lunghezza delle due corde, si può sapere fin dall’inizio se vincerà Stefano o Giovanni?

B3. *(11 punti)* Considera tutti i possibili quadrilateri nel piano. Chiama **A** l’insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati opposti della stessa lunghezza; **B** l’insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati adiacenti della stessa lunghezza; **C** l’insieme di tutti i quadrilateri aventi i quattro lati della stessa lunghezza; **D** l’insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati opposti paralleli e della stessa lunghezza. Alcuni di questi insiemi ne contengono uno o più degli altri. Per ogni insieme precisa gli eventuali altri insiemi che esso contiene.

B4. *(14 punti)* Un quadrato Q è piastrellato da 34 quadrati più piccoli, sui quali si sa solo che per 33 di essi il lato misura 1 cm. Quali sono il valore minimo e il valore massimo possibili per la lunghezza del lato del quadrato Q?

B5. *(18 punti)* Sono le 9.00 sul grande orologio posto all’entrata del parco di Mirabilandia: osservo che sul quadrante tutti i numeri compresi nell’arco compreso tra le due lancette, procedendo in senso orario, sono minori dei numeri 9 e 12 che stanno alle due estremità. Chiamo *coppia regolare* ogni sottoinsieme formato da due numeri diversi dell’insieme {1,2,3,…,12} che, come {9,12}:

- delimitano almeno un arco che contiene solo numeri minori di entrambi i numeri della coppia e
- non denotano due ore consecutive.

Quante sono le coppie regolari (se non tengo conto dell’ordine in cui scrivo i due numeri)?

B6. *(22 punti)* Ho 8,22 euro con cui voglio comprare due dolcetti per ciascuno dei miei 9 amici: possono essere ghiaccioli o cioccolate, ma tutti i miei amici preferiscono avere un ghiacciolo e una cioccolata e io intendo accontentare il maggior numero possibile di loro. Le cioccolate hanno tutte lo stesso prezzo come pure i ghiaccioli e ogni cioccolata costa 6 centesimi più di un ghiacciolo. Quanto deve costare come minimo un ghiacciolo, se spendo esattamente la cifra disponibile?

Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO BENJAMIN

B1. *(5 punti)* Sei naufragato sulla spiaggia di Mirabilandia che è abitata da due famiglie di pirati: quella dei Sinceri (che dicono sempre la verità) e quella dei Bugiardi (che mentono sempre). Incontri due pirati di nome Martedì e Mercoledì e vorresti sapere per ciascuno di loro a quale famiglia appartiene. Martedì afferma “noi apparteniamo a due famiglie diverse”, ma Mercoledì ribatte “non è vero!”. Che cosa concludi?

Soluzione. Visto che fanno affermazioni contrastanti non appartengono alla stessa famiglia. Dunque Martedì dice la verità e quindi è della famiglia Sinceri e Mercoledì è della famiglia Bugiardi.

B2. *(7 punti)* Stefano e Giovanni hanno a disposizione una corda rossa ed una blu (lunghe più di 20 centimetri). Essi intendono giocare nel modo seguente: a turno taglieranno da una delle estremità di una delle due corde uno spezzone che dovrà essere lungo 4 centimetri se il giocatore sceglie la corda rossa oppure 5 centimetri se il giocatore sceglie la corda blu. Perderà il primo dei due che non potrà più effettuare il taglio, cioè che si ritroverà con la corda rossa lunga meno di 4 centimetri e la corda blu lunga meno di 5 centimetri. Inizierà il gioco Stefano. In che modo, conoscendo la lunghezza delle due corde, si può sapere fin dall’inizio se vincerà Stefano o Giovanni?

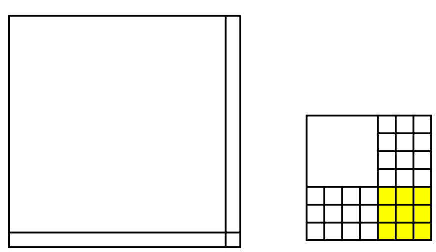
Soluzione. Dividiamo la lunghezza della corda rossa per 4 e quella della corda blu per 5 e sommiamo i due quozienti (interi!) così ottenuti: è chiaro che questa somma rappresenta il numero complessivo di tagli che verranno effettuati per realizzare il gioco. Allora se questa somma è un numero pari vincerà Giovanni, se è un numero dispari vincerà Stefano.

B3. *(11 punti)* Considera tutti i possibili quadrilateri nel piano. Chiama **A** l'insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati opposti della stessa lunghezza; **B** l'insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati adiacenti della stessa lunghezza; **C** l'insieme di tutti i quadrilateri aventi i quattro lati della stessa lunghezza; **D** l'insieme di tutti i quadrilateri aventi almeno una coppia di lati opposti paralleli e della stessa lunghezza. Alcuni di questi insiemi ne contengono uno o più degli altri. Per ogni insieme precisa gli eventuali altri insiemi che esso contiene.

Soluzione. **C**⊂**D**⊂**A** e **C**⊂**B**: **C** è l'insieme dei rombi che sono parallelogrammi cioè elementi di **D** e hanno 2 lati adiacenti di ugual lunghezza cioè sono elementi di **B** il che giustifica le prime due inclusioni; gli elementi di **D** sono caratterizzati da una proprietà in più rispetto a quella che caratterizza **A** il che giustifica l'ultima inclusione.

B4. *(14 punti)* Un quadrato *Q* è piastrellato da 34 quadrati più piccoli, sui quali si sa solo che per 33 di essi il lato misura 1 cm. Quali sono il valore minimo e il valore massimo possibili per la lunghezza del lato del quadrato *Q*?

Soluzione. È ovvio che anche per la piastrella che costituisce il 34-esimo quadrato, come pure per il quadrato *Q*, la lunghezza del lato deve essere un numero intero di centimetri. È pure ovvio che, perché aggiungendo i quadratini al 34-esimo quadrato si abbia ancora un quadrato, il numero di righe di quadratini aggiunti deve essere uguale al numero di colonne di quadratini aggiunti e che – essendo i quadratini aggiunti in numero dispari – tale numero non può essere pari. Dunque si può aggiungere una riga e una colonna (ciascuna lunga 17 quadratini) a un quadrato di lato 16 cm oppure aggiungere, a un quadrato di lato 4 cm, 3 righe e 3 colonne ciascuna lunga 4+3=7 quadratini. Non ci sono altre possibilità poiché aggiungendo a qualunque quadrato 5 righe e colonne si aggiungerebbero almeno $5\times2+5^2=35$ quadretti. Dunque il lato del quadrato *Q* ha al minimo lunghezza 7 cm e al massimo lunghezza 17 cm. I seguenti disegni possono aiutarti a capire.



B5. *(18 punti)* Sono le 9.00 sul grande orologio posto all'entrata del parco di Mirabilandia: osservo che sul quadrante tutti i numeri compresi nell'arco compreso tra le due lancette, procedendo in senso orario, sono minori dei numeri 9 e 12 che stanno alle due estremità. Chiamo *coppia regolare* ogni sottoinsieme formato da due numeri diversi dell'insieme {1,2,3,…,12} che, come {9,12}:

- delimitano almeno un arco che contiene solo numeri minori di entrambi i numeri della coppia e
- non denotano due ore consecutive.

Quante sono le coppie regolari (se non tengo conto dell'ordine in cui scrivo i due numeri)?

Soluzione. Tutte le coppie regolari devono contenere il numero 12. L'altro numero può e deve essere uno qualunque dei punti da 2 a 12–2=10 inclusi: dunque è il numero delle coppie regolari è 9.

B6. *(22 punti)* Ho 8,22 euro con cui voglio comprare due dolcetti per ciascuno dei miei 9 amici: possono essere ghiaccioli o cioccolate, ma tutti i miei amici preferiscono avere un ghiacciolo e una cioccolata e io intendo accontentare il maggior numero possibile di loro. Le cioccolate hanno tutte lo stesso prezzo come pure i ghiaccioli e ogni cioccolata costa 6 centesimi più di un ghiacciolo. Quanto deve costare come minimo un ghiacciolo, se spendo esattamente la cifra disponibile?

Soluzione. Visto che 822 non è divisibile per 9 è certo che non ho potuto accontentare tutti i miei amici, ma 822+6=828=92×9 è divisibile per 9. Dunque è possibile che il costo di un ghiacciolo sia (92−6):2=43 centesimi. In questo caso avrei potuto acquistare 10 ghiaccioli e 8 cioccolate, accontentando 8 amici. Se un ghiacciolo costasse meno, ad esempio 42 centesimi, avrei potuto comprare 9 ghiaccioli e 9 cioccolate con minor spesa, poiché [(42×2)+6]×9=810.