Kangourou della Matematica 2003
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2003

LIVELLO JUNIOR (tempo concesso 2 ore e 30')

J1. *(5 punti)* Indichiamo con

- *s* qualunque numero intero positivo divisibile per 6;
- *e* qualunque numero intero positivo pari che non sia divisibile per 6;
- *t* qualunque numero intero positivo divisibile per 3 che non sia già stato indicato con *s* o con *e*;
- *x* qualunque numero intero positivo dei rimanenti.

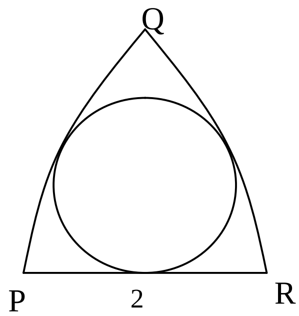
Quali delle seguenti sei parole

ese *ete* *exe* *ets* *exs* *ext*

possono corrispondere a tre interi consecutivi?

J2. *(7 punti)* Cristina e Roberta iniziano a contare nello stesso istante e con la stessa cadenza. Cristina conta di due in due crescendo a partire da 110 (110, 112, 114,…), mentre Roberta conta di cinque in cinque decrescendo a partire da 953 (953, 948, 943…). Di quanto differiranno i due numeri più vicini che esse pronunceranno nello stesso istante?

J3. *(11 punti)* La figura rappresenta un triangolo mistilineo PQR. Il suo contorno è costituito da un segmento PR di lunghezza 2 e da due archi di circonferenza PQ e QR di centri rispettivamente R e P. Quanto vale l'area del più grande cerchio che si può inscrivere nel triangolo?



J4. *(14 punti)* Due ciclisti corrono su una pista circolare ciascuno a velocità costante. Se corrono nello stesso verso, ogni dieci minuti il ciclista più veloce raggiunge l'altro; se corrono in versi opposti, si incontrano ogni due minuti. Qual è il rapporto fra la velocità del ciclista più veloce e quella del ciclista più lento?

J5. *(18 punti)* Per un punto fissato internamente ad un triangolo rettangolo si traccino le parallele ai lati. Siano *a*, *b* e *c* le aree dei tre triangoli rettangoli che vengono così individuati. Quanto vale l'area del triangolo di partenza?

J6. *(22 punti)* Un solo numero intero positivo di dieci cifre (significative) ha una rappresentazione decimale tale che la sua prima cifra (da sinistra) corrisponde al numero delle sue cifre che sono uguali a zero, la sua seconda cifra corrisponde al numero delle sue cifre che sono uguali a uno, la sua terza cifra corrisponde al numero delle sue cifre che sono uguali a due e così via fino alla sua decima cifra che corrisponde al numero delle sue cifre uguali a nove. Determina tale numero.

Soluzione dei quesiti proposti alla finale di Mirabilandia 2003

Livello Junior

J1: *ete*, *exs*. *s* denota un numero divisibile per 6, *e* un numero pari non divisibile per 3, *t* un numero divisibile per 3 e dispari. Quindi *x* denota un numero non divisibili per 2 né per 3. Non rappresentano quindi 3 interi consecutivi le parole
ese perché 3 pari non possono essere consecutivi
exe perché di 3 numeri consecutivi almeno uno è divisibile per 3
ets perché se *t* è divisibile per 3 il suo successore non lo è
ext perché *x* e *t* sono entrambi dispari
Invece *ete* può corrispondere ad es. a 234 e *exs* può corrispondere ad es. a 456.

J2: 3. Al passaggio *n* il numero detto da Roberta è uguale alla somma di un opportuno intero (eventualmente negativo) *r* con il numero detto da Cristina: 110+2*n*+*r*=953?5*n*. L'uguaglianza 7*n*+*r*=843 dà ?*r*? minimo se *r* è il resto della divisione di 843 per 7 oppure tale resto ?7. Il resto è *r*=3, e quindi è minore di ?3?7?

J3: 9?/16. La figura è simmetrica rispetto all'asse di *PR* e quindi basta far riferimento al solo arco *QR* di centro *P*. La circonferenza del cerchio inscritto è tangente all'arco *QR*, se nel punto *T* di tangenza hanno retta tangente comune cioè se *P*, il centro *O* del cerchio inscritto e *T* sono allineati. Allora, se *r* è il raggio del cerchio inscritto *P*, *O* e il punto *M* medio di *PR* formano un triangolo rettangolo di cateti *OM*=*r* e *PM*=1 e ipotenusa *PO*=2?*r*. Dunque *r*=3/4.

J4: 3/2. Detta *V* la velocità del ciclista più veloce e *v* quella del ciclista più lento, la lunghezza della pista può essere espressa come 10*V*-10*v* oppure come 2*V*+2*v*: quindi deve essere 8*V*=12*v*.

J5: $(\sqrt{a} ? \sqrt{b} ? \sqrt{c})^2$. Oltre ai tre triangoli (tutti simili al triangolo di partenza) si ottengono anche 3 parallelogrammi, per cui è ovvio che la base del triangolo di partenza è la somma delle basi dei tre triangoli piccoli e similmente per l'altezza. Dette *x* e *y* la base e l'altezza del triangolo di area *a*, il triangolo di area *b* avrà base *hx* e altezza *hy* (con $h^2=b/a$) e il triangolo di area *c* avrà base *kx* e altezza *ky* (con $k^2=c/a$). Dunque l'area del triangolo di partenza è
$(1 ? h ? k)^2 ?xy ? a ? b ? c ? 2\sqrt{ab} ? 2\sqrt{ac} ? 2\sqrt{bc}$.

J6: 6 2 1 0 0 0 1 0 0 0 . Denoto con f(n?1) l'elemento che compare al posto n (da sinistra)e quindi conta quante volte la cifra n-1 compare nel numero. Allora f(0)+…+f(9)=10 e, se le cifre sono 10, f(0)?0. Inoltre se f(n)=h, f(h)?0. Quindi non può essere f(0)=9. Se f(0)=8, f(8)?1; ma allora f(1)?1 e quindi non ci sono 8 zeri. Se f(0)=7, 10?7=3 può essere rappresentato come somma di 3 cifre non nulle solo come 1+1+1: ma il numero di cifre 1 che compare in questa rappresentazione non è 1 e quindi non è rappresentabile attraverso le cifre del numero. Se f(0)=6, f(6)=h?1 e quindi f(h)=k?1 e f(k)?1: 10?6=4 può essere rappresentato come somma di 3 cifre non nulle solo come 2+1+1; essendoci due volte la cifra 1è forzato porre f(6)=1, f(1)=2, f(2)=1 e quindi l'unica possibile soluzione è: 6210001000. Se f(0)=5, 10?5=5 può essere rappresentato come somma di 4 cifre non nulle solo come 2+1+1+1: ma il numero di cifre 1 che compare in questa rappresentazione non è 1 né 2 e quindi non è rappresentabile attraverso le cifre del numero. Più in generale, per ogni h?5, 10?h può essere rappresentato come somma di 9?h cifre solo come 2+1+…+1 e il numero di cifre 1 è 7?h>2 e quindi non è rappresentabile attraverso le cifre del numero.