Kangourou Italia
Gara del 15 marzo 2001
Categoria Junior
Per studenti di seconda e terza superiore

Regole:

- ***La prova è individuale. E' vietato l'uso di calcolatrici di qualunque tipo.***
- ***Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Le risposte esatte fanno sommare 3, 4 o 5 punti secondo la loro difficoltà (3 punti per i primi 10 quesiti, 4 punti per i quesiti da 11 a 20, 5 punti per gli ultimi 10). Ogni risposta errata fa sottrarre un quarto del suo valore in punti: si tolgono 0.75 punti per una risposta errata a un quesito da 3 punti, 1 punto se il quesito è da 4 punti, 1.25 se è da 5 punti. Se ad un quesito non viene data alcuna risposta il punteggio attribuito è 0. Ad esempio: se si risponde correttamente a 3 quesiti da 4 punti e si risponde in modo errato ad un quesito da 5 punti, il punteggio relativamente a questi quattro quesiti sarà $3\times 4 - 1.25 = 10.75$.***
- ***Durata della prova: un'ora e quindici minuti. Inserite le vostre risposte nelle corrispondenti caselle della scheda delle risposte.***

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

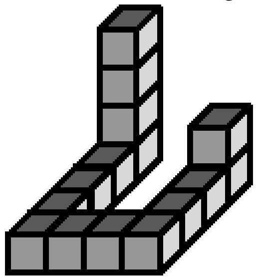
1. Lancio simultaneamente tre dadi e sommo i punti che appaino sulle loro facce superiori. Quanti sono i diversi valori possibili di tale somma?
   (A) 18 (B) 17 (C) 16 (D) 15 (E) 14.

2. Gli studenti A, B, C, D, E ed F sono disposti in fila indiana. Si sa che: 1) D si trova tra E ed F; 2) C tra D ed E; 3) B tra C e D; 4) A tra B e C. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) A si trova ad un'estremità (destra o sinistra) della fila
(B) A è il secondo a partire da una delle estremità
(C) A è il terzo a partire da una delle estremità
(D) una tale disposizione non è possibile
(E) una tale disposizione è possibile, ma non si può determinare in modo univoco la posizione di A.

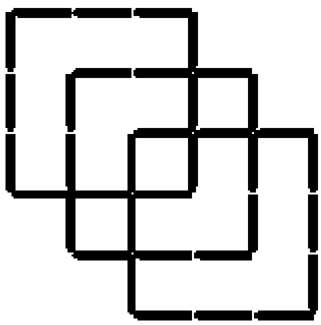
3. Una delle diagonali *d* divide un poligono di perimetro 31 cm in due poligoni di perimetro rispettivamente 21 cm e 30 cm. Allora la lunghezza di *d* è
(A) 5 cm (B) 10 cm (C) 15 cm (D) 20 cm
(E) non determinabile senza ulteriori informazioni.

4. Il solido rappresentato nella figura a lato è formato da cubetti di lato unitario. Qual è il minimo numero di cubetti di lato unitario che occorre aggiungere per formare un cubo che contenga il solido iniziale? (I cubetti esistenti non possono essere spostati).
(A) 49 (B) 60 (C) 65 (D) 110 (E) 125.



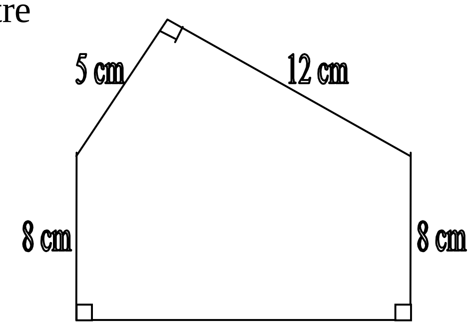
5. *m* è un intero positivo tale che MCD (*m*, 35) > 10. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) la rappresentazione decimale di *m* ha almeno tre cifre
(B) *m* è un multiplo di 35
(C) *m* è divisibile per 15
(D) 35 è un multiplo di *m*
(E) *m* è divisibile per 5 o per 7, ma non per entrambi
Nota: MCD (*a*, *b*) indica il massimo comune divisore tra *a* e *b*.

6. Trova il minimo numero di fiammiferi che bisogna aggiungere alla figura in modo da ottenere esattamente 11 quadrati.
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.



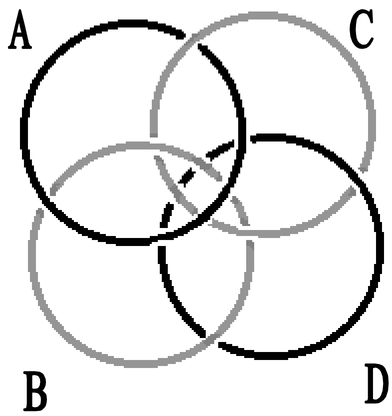
7. Quanti sono i numeri primi minori di 2001 la somma delle cui cifre è uguale a 2?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) più di quattro.

8. Il perimetro del poligono raffigurato a lato (i tre angoli indicati sono retti) vale
(A) 38 cm (B) 41 cm (C) 46 cm
(D) 50 cm (E) 59 cm.



9. Quante cifre contiene la rappresentazione decimale del più piccolo intero positivo che può essere scritto usando le sole cifre 0 e 1, e che sia divisibile per 225?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14.

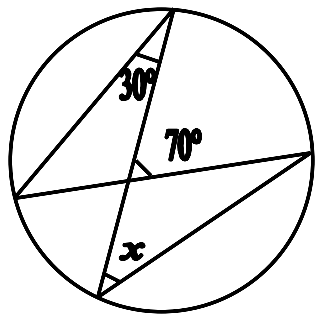
10. Tagliando un solo anello, è possibile liberarli tutti?
(A) sì, tagliando A (B) sì, tagliando B
(C) sì, tagliando C (D) sì, tagliando D
(E) no.



I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. *a, b, c* e *d* sono interi positivi tali che $a + b = c\ d$ e che $a + b + c = 12$. Quanti sono i possibili diversi valori che può assumere *d* ?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

12. Qual è la misura dell'angolo "*x*" nella figura?
(A) 30° (B) 35° (C) 40° (D) 45°
(E) 50°.

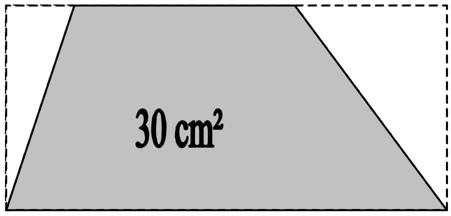


13. Un orologio ritarda di X minuti ogni Y ore. Quante ore, in termini di X e Y, ritarderà quell'orologio in una settimana?

(A) $\frac{2X}{5Y}$ (B) $\frac{5Y}{2X}$ (C) $\frac{14X}{5Y}$ (D) $\frac{5Y}{14X}$ (E) $\frac{168X}{Y}$.

14. Gaspare aveva 400 franchi e doveva acquistare 100 tavolette di cioccolato al costo di 4 franchi l'una. Nel supermercato ha scoperto che per ogni 6 tavolette di cioccolato che aveva nel carrello, una nuova tavoletta veniva aggiunta gratuitamente alla cassa. Quanti franchi sono rimasti a Gaspare all'uscita dal supermercato, sapendo che oltre al cioccolato non ha acquistato altro?
(A) 52 (B) 56 (C) 60 (D) 64 (E) 68.

15. Due triangoli sono stati tolti da un rettangolo (si veda la figura). Il restante trapezio ha l'area di 30 cm² e la sua base maggiore è doppia della minore. Qual è la somma delle aree dei due triangoli che sono stati tolti?



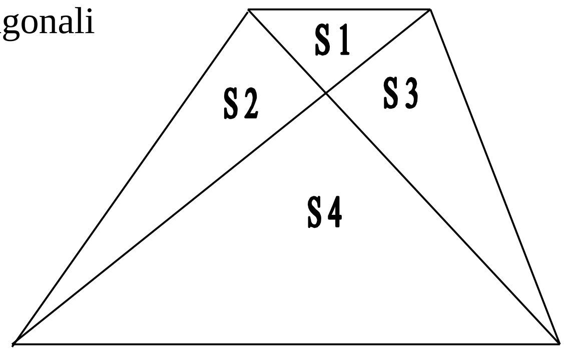
(A) 10 cm² (B) 12 cm² (C) 15 cm² (D) 18 cm² (E) 20 cm².

16. Ogni volta che il cammello Desirée ha sete, l'84% del suo corpo è costituito da acqua. Dopo aver bevuto, il suo peso raggiunge gli 800 kg e l'acqua costituisce l'85% del suo peso. Qual è il peso del cammello Desirée quando ha sete?

(A) 672 kg (B) 680 kg (C) 715 kg (D) 720 kg (E) 750 kg.

17. Il prodotto delle età dei miei figli (in anni) è 1664. Il più giovane ha la metà degli anni del più anziano e non vi sono gemelli. Quanti figli ho?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

18. Il trapezio ABCD è suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli di area S_1, S_2, S_3, S_4 (si veda la figura). Se $S_2 = 3 \cdot S_1$, allora



(A) $S_4 = 3 \cdot S_1$ (B) $S_4 = 4 \cdot S_1$ (C) $S_4 = 6 \cdot S_1$ (D) $S_4 = 9 \cdot S_1$ (E) $S_4 = 12 \cdot S_1$.

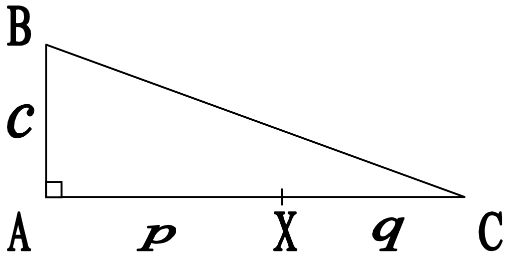
19. Nell'espressione 2 * 4 * 6 * 8 * 10 * 12 * 14 ad ogni asterisco può essere sostituito il segno " + " o il segno " – ". Quale numero non può essere il risultato di alcuna di queste espressioni ?
(A) 0 (B) 4 (C) – 4 (D) 48 (E) 30.

20. Nella divisione 999 : *n*, dove *n* è un numero naturale di due cifre (significative), il resto vale 3. Allora il resto della divisione 2001 : *n* vale
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9.

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. In una scatola di caramelle vi erano 31 caramelle. Il primo giorno Cristina mangiò i 3/4 del totale delle caramelle che Paolo aveva appena mangiato prelevandole da quella scatola. Il secondo giorno Cristina mangiò i 2/3 del totale delle caramelle appena mangiate da Paolo nel secondo giorno (sempre prelevate dalla stessa scatola). Alla fine del secondo giorno la scatola era vuota. Quante caramelle ha mangiato Cristina da quella scatola?
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 15.

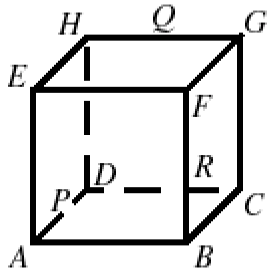
22. Un triangolo rettangolo ABC come in figura, con $\overline{AB} = c$, $\overline{AX} = p$ e $\overline{XC} = q$, rappresenta un terreno. Jenny e Vicky camminano alla stessa velocità in direzioni opposte sul bordo del terreno, partendo entrambe allo stesso istante dalla posizione X. Le due ragazze si incontrano in B. Qual è il valore di *q* in funzione di *p* e *c*?



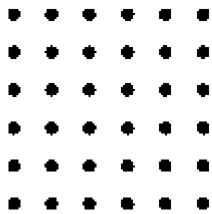
(A) $\dfrac{p}{2+c}$ (B) $\dfrac{pc}{2p+c}$ (C) $\sqrt{p^2+c^2}+\dfrac{c}{2}$ (D) $\dfrac{p+c}{2}$ (E) *c*-*p*.

23. Ho 11 scatole grandi: alcune di esse contengono 8 scatole medie ciascuna, alcune delle scatole medie contengono a loro volta 8 scatole piccole ciascuna. Se le scatole (di varia dimensione) vuote sono 102, quante sono in totale le scatole (a prescindere dalla dimensione)?
(A) 102 (B) 64 (C) 118 (D) 115 (E) non è possibile rispondere.

24. Sia $a = 1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$. La cifra delle unità di a è
(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

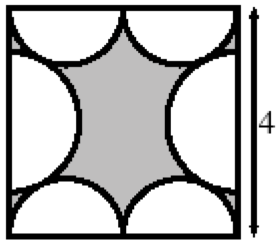


25. ABCDEFGH è un cubo di lato 2 cm. P, Q e R sono i punti medi di AD, GH e BF rispettivamente. Quanto misura l'area del triangolo PQR?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$ (B) $3\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$
(D) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{cm}^2$.



26. Nella griglia a fianco, la distanza tra due punti adiacenti è 1 cm sia in orizzontale sia in verticale. Congiungete due punti in modo da formare un segmento lungo 5 cm. Quanti di questi segmenti possono essere tracciati nella griglia?
(A) 10 (B) 12 (C) 24 (D) 34 (E) 36.

27. Cancelliamo la cifra delle unità di un intero positivo e notiamo che il numero diminuisce di 14 volte. Quanti numeri interi possiedono questa proprietà?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.



28. Se A è l'area del quadrato (di lato 4) e B è l'area totale dei sei semicerchi come in figura, allora il valore di $A - B$ è
(A) 8 (B) $16 - 3\pi$ (C) $16 - 4\pi$
(D) $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\,\pi$ (E) $16 - 4\pi + \sqrt{5}\,\pi$.

29. In quanti modi differenti si può piastrellare un pavimento di forma rettangolare di dimensione 2×8, utilizzando delle piastrelle rettangolari di dimensione 1×2 (senza sovrapposizioni)?
(A) 16 (B) 21 (C) 30 (D) 32 (E) 34.

30. In quanti modi differenti si può scomporre il numero 30 come somma di tre interi strettamente positivi? (Due scomposizioni sono uguali se differiscono solo per l'ordine degli addendi.)
(A) 105 (B) 75 (C) 81 (D) 362 (E) 101.

Risposte Categoria Junior
Gara del 15 marzo 2001

1. (**C**) Il minimo ottenibile è 3 e il massimo è 18 e sono ottenibili tutti i valori intermedi, quindi il totale è 16.

2. (**C**) Una configurazione è la seguente: *E*-*C*-*A*-*B*-*D*-*F* e l'altra possibile è quella ottenuta ribaltando quella appena descritta: in ogni caso *A* si trova ad essere terzo a partire da una opportuna estremità.

3. (**B**) Se x denota la lunghezza della diagonale si ha: $30 + 21 - 2x = 31$, per cui $x = 10$ cm.

4. (**D**) Il più piccolo cubo ha dimensioni $5 \cdot 5 \cdot 5$, cioè ha 125 cubetti: dato che in figura si contano 15 cubetti ne rimangono 110.

5. (**B**) L'unico divisore di 35 maggiore di 10 è 35 stesso quindi il massimo comune divisore deve essere un multiplo di 35.

6. (**A**) Basta aggiungere un fiammifero sul prolungamento del lato sinistro del quadrato 3x3 più in basso e un fiammifero sul prolungamento del lato inferiore del quadrato 3x3 più in alto e si ottengono 3 nuovi quadrati: due di lato unitario e uno di lato doppio. A questi si aggiungano gli attuali 8 quadrati già presenti e così se ne trovano 11 in totale.

7. (**C**) Un numero minore di 2001 la cui somma delle cifre valga 2 ha al più 4 cifre di cui una vale 2 e le rimanenti 0, oppure due valgono 1 e le altre 0. Perciò gli unici primi minori di 2001 con somma delle cifre uguale a 2 sono 11 , 2 e 101.

8. (**C**) Il lato orizzontale misura 13 cm, perché coincide con la diagonale vicina ai lati lunghi 5 e 12 cm. Quindi il perimetro vale 46 cm.

9. (**B**) Essendo $225 = 9 \times 25$, è sufficiente che il nostro numero sia divisibile per 9 e per 25. Quindi deve contenere per lo meno 9 cifre uguali ad 1 e deve terminare con 00. Pertanto, il più piccolo intero con le proprietà richieste è 11111111100, formato da $9 + 2 = 11$ cifre.

10. (**C**) Se eliminiamo l'anello *C* si nota subito che gli altri non sono incatenati tra di loro.

11. (**D**) Si deve avere: $cd = 12 - c$ e si trovano le seguenti 5 soluzioni: $c = 1, d = 11;$ $c = 2$, $d = 5;$ $c = 3, d = 3;$ $c = 4, d = 2;$ $c = 6, d = 1.$

12. (**C**) L'angolo di 70 gradi è un angolo esterno al triangolo contenente l'angolo di 30 gradi, per cui tale triangolo ha angoli di 40 gradi e di 110. Questo comporta che x=40 gradi, dato che incide sullo stesso arco dell'angolo di 40 gradi.

13. (**C**) Ogni ora l'orologio ritarda di X/Y minuti, cioè X/(60×Y) ore. Per cui ogni settimana ritarda di 7·24×X/(60×Y)=14×X/(5×Y) ore.

14. (**B**) Sia n il numero delle tavolette risparmiate. Allora n è il massimo intero positivo tale che $6n + n = 7n$ £ 100. Perciò Gaspare ha risparmiato $n = 14$ tavolette, cioè $14 \times 4 = 56$ franchi.

15. (**A**) Il rapporto tra l'area del trapezio e l'area dei due triangoli è 3 dato che, se indichiamo con b la base minore, la somma delle basi del trapezio vale $3b$ mentre la somma delle basi dei triangoli vale solo $2b - b = b$ (si tenga presente che le altezze dei triangoli e del trapezio sono le stesse). Quindi l'area totale dei due triangoli risulta essere 10 cm^2.

16. (**E**) Gli 800 kg raggiunti dal cammello dopo aver bevuto sono costituiti da 800×85/100 di acqua e 800×15/100 di altro. Prima di aver bevuto, il peso totale T del suo corpo è costituito da T×84/100 di acqua e T×16/100 di altro. Se uguagliamo le espressioni: T×16/100=800×15/100 troviamo che il peso T del cammello quando non ha ancora bevuto è pari a 750 kg.

17. (**B**) Il numero 1664 si decompone in 2×4×4×4×13. L'unica possibilità per soddisfare ai requisiti è 8×13×16, e il numero di figli pertanto è 3.

18. (**D**) I triangoli di aree S_1 e S_2 hanno un'altezza in comune, perciò per le corrispondenti basi b_1 e b_2 abbiamo $b_2 / b_1 = S_2 / S_1 = 3$. Lo stesso vale per i triangoli di aree S_3 e S_4 : $S_4 / S_3 = b_2 / b_1 = 3$. Inoltre $S_1 + S_2 = S_1 + S_3$, per cui S_2=S_3 . Concludiamo che $S_4 = 3\ S_3 = 3\ S_2 = 9\ S_1$.

19. (**E**) Se mettiamo tutti segni + il risultato è un multiplo di 4 e se sostituiamo un segno + con un segno – il risultato diminuisce del doppio di un numero pari, cioè ancora rimane un multiplo di 4. Quindi il numero 30 (che è l'unico a non essere multiplo di 4 fra quelli proposti) non potrà mai essere ottenuto, comunque si scelgano i segni + o –.

20. (**E**) 2001=2×999+3, quindi se il resto della divisione di 999 per un certo numero n (maggiore di 9) è uguale a 3 il resto della divisione di 2001 per lo stesso numero n è 2×3+3=9.

21. (**D**) Se indico con c_1 le caramelle mangiate da Cristina il primo giorno e con c_2 quelle mangiate da Cristina il secondo giorno si ha che il primo giorno sono state mangiate $c_1(1 + 4/3)$ caramelle e nel secondo giorno $c_2(1 + 3/2)$. Abbiamo quindi l'equazione $(7/3)\ c_1 + (5/2)\ c_2 = 31$, il che equivale a dire $14c_1 + 15c_2 = 186$. L'unica soluzione accettabile di questa equazione che deve avere soluzioni intere positive è $c_1 = 9$, $c_2 = 4$ e quindi in totale Cristina ha mangiato 13 caramelle.

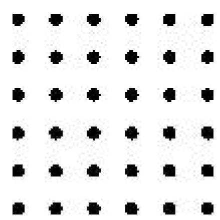
22. (**B**) L'equazione che si ottiene uguagliando le lunghezze dei due percorsi è $p + c = q + \sqrt{c^2 + (p+q)^2}$ che diventa, dopo semplici manipolazioni, $q = \dfrac{pc}{2p + c}$.

23. (**D**) Sia x il numero delle scatole grandi contenenti 8 scatole medie e sia y il numero delle scatole medie contenenti 8 scatole piccole. Il numero totale di scatole vuote allora è: $(11 - x) + (8x - y) + 8y$. Questo numero deve essere 102, quindi: $x + y = 13$. Il numero delle scatole in totale è $11 + 8x + 8y$ e quindi vale $11 + 8\,(x + y) = 11 + 104 = 115$.

24. (**B**) 1997 termina con 7 e le sue potenze terminano rispettivamente con 7, 9, 3, 1 e poi periodicamente ripetono gli stessi valori: per cui 1997^{1998} termina con 9. Analogamente il secondo addendo termina con 2, il terzo con 1 e il quarto ovviamente con 0: in definitiva la loro somma termina con 2.

25. (**C**) Il triangolo PQR è equilatero e per calcolare il suo lato possiamo calcolare la ipotenusa del triangolo rettangolo PBR: il quadrato del cateto PB vale 5 e il quadrato di BR vale 1 quindi PR misura $\sqrt{6}\ \ cm^2$. Questo comporta che l'area del triangolo misura $\frac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt{6}\sqrt{3}\ \ cm^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ \ cm^2$.

26. (**E**) Possiamo ottenere segmenti lunghi 5 cm o prendendo punti allineati orizzontalmente o verticalmente oppure otteniamo segmenti lunghi 5 cm anche come segmenti obliqui che possono esser visti come ipotenuse di triangoli aventi cateti di 3 e 4cm. Contando tutte queste possibilità troviamo 6 segmenti orizzontali, 6 verticali e 24 obliqui (6 + 6 "crescenti" e 6 + 6 "decrescenti"): in totale 36 possibili segmenti. Questo esercizio è stato annullato perché, per un problema di stampa, la figura è risultata modificata. La figura esatta era quella a lato.



27. (**C**) Sia $10a + b$ il nostro numero (dove b è l'ultima cifra). Cancellando l'ultima cifra si ottiene il numero a. Per cui abbiamo l'equazione $14a = 10a + b$, cioè $4a=b$. Le uniche due soluzioni ammissibili sono $a = 1, b = 4$ e $a = 2, b = 8$.

28. (**D**) Il raggio dei cerchi piccoli vale 1 e il raggio dei 2 cerchi grandi vale $\sqrt{5}-1$ dato che la distanza dei centri di un cerchio grande e di uno piccolo tangente è $\sqrt{5}$. Allora l'espressione A–B vale $16-p(\sqrt{5}-1)^2-2p=16-8p+2\sqrt{5}p$.

29. (**E**) Per individuare in quanti modi diversi possiamo ricoprire il rettangolo, vediamo come disponiamo le piastrelle orizzontali nella prima delle due file del nostro rettangolo 2x8. Se usiamo tutte le piastrelle verticalmente, cioè parallele al lato corto del rettangolo abbiamo un modo solo. Se usiamo 6 verticali e 1 orizzontale nella prima fila abbiamo 7 modi. Se usiamo 2 orizzontali nella prima fila abbiamo 15 modi, se usiamo 3 orizzontali abbiamo 10 modi e se usiamo 4 orizzontali abbiamo 1 solo modo. In totale abbiamo 34 modi distinti.

30. (**B**) Vogliamo determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $a + b + c = 30$ con a, b, c interi positivi tali che $a \le b \le c$. Se $a=1$ abbiamo 14 soluzioni: $b=1\ldots14$, $c=29 - b$. Se $a=2$ abbiamo 13 soluzioni: $b=2\ldots14$. Se $a=3$ abbiamo 11 soluzioni, se $a=4$ 10 sol., se $a=5$ 8 sol., se $a=6$ 7 sol., se $a=7$ 5 sol., se $a=8$ 4 sol., se $a=9$ 2 sol., e infine se $a=10$ una sola soluzione. In totale abbiamo 75 soluzioni distinte.