Testi e soluzioni della Coppa Student 2022

ISBN: 978-88-89249-71-0
€ 7.00

Coppa Student 2022

Per informazioni:

Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques"
dell'Università degli Studi di Milano
via Saldini, 50 – 20133 Milano
tel. 347 040 27 55
E-mail: matematica@kangourou.it
Sito: https://www.kangourou.it

In copertina: ***1345 Anatra ghematrica***
Scultura di Tobia Ravà: Bronzo da fusione a cera persa. Coll. priv.

ISBN: 978-88-89249-71-0

Perché la Coppa Student ?

1. **Introduzione:** l'ordinanza ministeriale del 4 maggio 2017 sul regolamento dell'esame di Stato ammette alla seconda prova della maturità scientifica l'utilizzo della calcolatrice scientifica, grafica e programmabile purché non disponga di collegamenti a Internet o alla presa di corrente e che non contempli il calcolo simbolico (CAS). L'incontro poi con l'azienda CASIO che produce, fra l'altro, questo tipo di calcolatrici e dispone di un simulatore ci ha stimolato a pensare a come utilizzare questo strumento. La calcolatrice potrebbe essere solo uno strumento di revisione o di controllo di quanto prodotto "a mano" oppure potrebbe essere qualcosa che, risolvendo "autonomamente" un certo numero di passaggi, possa aprire orizzonti verso nuovi quesiti come la ricerca e il controllo di algoritmi o il calcolo numerico. L'idea è dunque di provare nel 2022 ad organizzare una competizione a squadre riservata a studenti delle scuole secondarie di secondo grado dove ogni squadra disponga di almeno una calcolatrice o un simulatore.

2. **Qualche dettaglio:** le squadre saranno composte di 4 elementi, allievi della stessa scuola superiore, e ogni scuola potrà iscrivere fino a 5 squadre. La gara si svolgerà in due tempi: una selezione e una finale nazionale. La selezione si svolgerà per tutti lo stesso giorno, nel mese di gennaio, alla stessa ora e con lo stesso testo. La selezione potrà svolgersi localmente (le squadre si recheranno tutte presso una sede fissata, ad esempio: Brescia, Milano, Modena, Udine, Genova, Salerno, Catania) oppure potrà svolgersi online oppure infine una selezione potrà svolgersi tra tutti i licei matematici che intenderanno partecipare. Le migliori squadre uscite dai tre tipi di selezione parteciperanno alla finale nazionale il 3 maggio 2022 alle 11.00 nel Palazzetto dello Sport di Cervia (RA). Per la selezione le squadre utilizzeranno il simulatore o la calcolatrice mentre ognuna delle 40 squadre finaliste avrà a disposizione una calcolatrice CASIO. Alle selezioni locali e alla selezione dei licei matematici non è previsto un costo di iscrizione mentre per le scuole che avranno almeno una squadra in finale è previsto che siano iscritte alla gara individuale Kangourou della Matematica 2022. La proposta di gara verrà lanciata a settembre 2021 unitamente a una lista di problemi di prova e alla spiegazione dell'uso del simulatore. Le regole della gara a squadre per la Coppa Student sono le stesse della Coppa Kangourou, della Coppa Junior e della Coppa Ecolier.

3. **Quesiti:** naturalmente la quasi totalità dei quesiti proposti può essere risolta "a mano" utilizzando più tempo e maggiore attenzione nei calcoli. La calcolatrice, oltre che essere più rapida e precisa nei calcoli, consente di affrontare quesiti relativi

a. al grafico delle funzioni e delle loro derivate;
b. allo studio e alla composizione di tabelle;
c. alla probabilità e alla statistica, avendo un modulo dedicato;
d. alla programmazione ed esecuzione di piccoli programmi in linguaggio Python.

4. **Internazionale:** la Francia con una circolare dell'ottobre 2015 ha autorizzato l'uso delle calcolatrici per gli esami di Stato. I testi scolastici si sono dovuti adattare rapidamente a questa novità.

Milano, 26 settembre 2021

Prof. Angelo LISSONI
Presidente Associazione Culturale
Kangourou Italia

I primi quattro passi (testi)

A1. Il problema di Collatz

A partire da un numero N intero maggiore di 1, se ne calcola un altro nel modo seguente: se N è pari, si divide per 2; se invece N è dispari, lo si moltiplica per 3 e si aggiunge 1. Dopodiché si ricomincia con il numero così calcolato, fino a che non si ottiene 1. La lista dei numeri calcolati (N escluso, ma 1 finale compreso) è il *volo* di N.
Il numero di elementi di questa lista è il *tempo di volo* di N.
L'*altezza massima del volo* è il numero più grande presente in questa lista.

1. Scrivete il *volo*, il *tempo di volo* e infine l'*altezza massima del volo* del numero 11.
2. Definite un algoritmo in linguaggio Python che, a partire da un intero $N > 1$, calcoli tutti e tre i risultati relativi al volo di N.
3. Provate questo algoritmo per differenti valori di N, oltre a 11; ad esempio: 23, 15 e 127.

Ricordate che, con i due operandi interi a e b, con b diverso da 0, l'espressione $a \ \% \ b$ vale il resto della divisione euclidea (ossia intera) di a diviso b. Così $a \ \% \ 2$ è uguale a 0 se a è pari, è invece uguale a 1 se a è dispari.

A2. Calcolo di un limite

Sia $f(x)$ la funzione definita su $\mathbf{R} - \{2\}$ da

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x - 2}$$

1. Calcolate i limiti seguenti:

   $$\lim_{x \to 2}(x - 2) \qquad \lim_{x \to 2}(x^3 - x - 6)$$

   Questi risultati permettono di fornire il valore del limite di f in 2 ?

2. Ottenete, con l'aiuto di una calcolatrice, una tabella di valori di f che permetta di congetturare il limite di f in 2.

3. Sviluppate $(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$ e deducetene il limite di f in 2.

A3. Flusso di popolazioni

L'oggetto di questo esercizio è lo studio del flusso delle popolazioni fra tre zone geografiche: una città denominata A, una zona periferica denominata B e una zona rurale denominata C. Per modellare il flusso delle popolazioni, facciamo le seguenti ipotesi.

- La popolazione totale delle tre zone rimane costante.
- Ogni anno, la zona A perde il 20% della sua popolazione, ma accoglie il 10% della popolazione della zona B e il 12% di quella della zona C.
- Ogni anno, la zona B perde il 10% della sua popolazione, ma accoglie il 20% della popolazione della zona A e il 12% di quella della zona C.
- Ogni anno, la zona C perde il 24% della sua popolazione.

Al primo gennaio 2020, le zone A, B, C contavano rispettivamente 6000, 1000 e 3000 abitanti.

Chiamiamo a_n, b_n e c_n il numero degli abitanti rispettivi delle zone A, B e C al primo gennaio dell'anno $2020 + n$. Ammetteremo, per i nostri calcoli, che i numeri reali a_n, b_n e c_n possano non essere interi.

1. Per ogni naturale n, esprimete ciascuno dei numeri a_{n+1}, b_{n+1} e c_{n+1} in funzione dei numeri a_n, b_n e c_n.
2. Con l'aiuto di una tabella, prodotta mediante la calcolatrice, rispondete alle domande seguenti.
   a. Qual è la popolazione di ciascuna delle tre zone A, B, C al primo gennaio 2033 ?
   b. Su quale valore il numero di abitanti di ciascuna delle tre zone A, B, C finirà per stabilizzarsi?
3. Ecco, infine, altre tre richieste.
   a. Qual è il limite della successione $\{c_n\}$? Determinate, per ogni naturale n, l'espressione di c_n in funzione di n.
   b. Ammettiamo che, per ogni naturale n, si abbia:

$$a_n = \frac{10000}{3}(10 + 5 \cdot (0,7)^n + (0,76)^n)$$

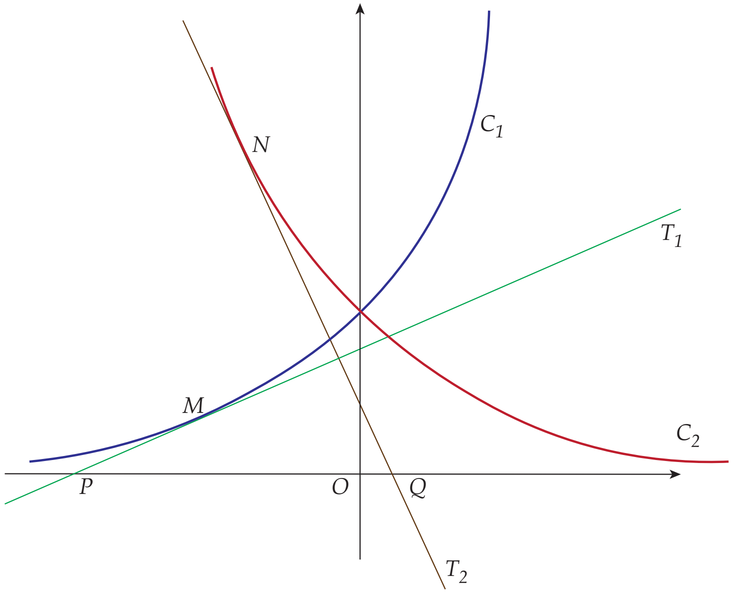
Determinate il limite della successione $\{a_n\}$, poi quello della successione $\{b_n\}$.

c. Questi risultati sono in accordo con i numeri di abitanti delle tre zone trovati al punto 2.**b.**?

A4. Tangenti

Sia dato un piano con un riferimento cartesiano.
Siano C_1 e C_2 le curve di equazione $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ rispettivamente, e sia a un numero reale.
Chiamiamo M e N i punti appartenenti a C_1 e a C_2 di ascissa a, e T_1 e T_2 le tangenti a C_1 e C_2 rispettivamente in M e N.
Le rette T_1 e T_2 tagliano l'asse delle ascisse rispettivamente in P e Q.

1. Determinate i coefficienti angolari delle rette T_1 e T_2. Le rette T_1 e T_2 sono fra loro perpendicolari?
2. Calcolate le coordinate di P e Q. Dimostrate che la distanza PQ è uguale a 2.



Testi di allenamento 12 e 14 gennaio 2022

NOTA: la difficoltà di quasi tutti i seguenti esercizi è volutamente non elevata per permettere, durante l'allenamento, di prendere confidenza con il software della gara.

B1. La percentuale. Se x è il 250% di y, allora quale percentuale di x è $2y$?

B2. Gli alberi nel vivaio. In un vivaio vi sono più di 90 alberi ma meno di 100. Un terzo delle piante sono alberi di mele, un quarto sono alberi di pere e il resto sono ciliegi. Quanti sono gli alberi nel vivaio?

B3. Il test di 30 domande. Vi sono 30 domande in un test. Ogni risposta esatta incrementa il punteggio di 7 punti mentre ogni risposta errata lo decrementa di 12 punti. Massimo ha risposto a tutte le domande e ha totalizzato 77 punti. Quanti errori ha commesso?

B4. La grande moltiplicazione. Moltiplicate il numero 1999 per il numero che è formato da 1999 cifre 1. Qual è la somma delle cifre del risultato?

B5. Il treno in galleria. Un treno che è lungo 200 metri e viaggia a 200 km/h entra in una galleria lunga 800 metri. Quanti secondi sono necessari al treno per attraversare completamente tutta la galleria?

B6. Il libro di 2000 pagine. Quante volte la cifra 9 appare nei numeri di pagina di un libro di 2000 pagine?

B7. I divisori. Quanti sono i divisori positivi di 144 sommati al numero dei divisori positivi di 1820 e al numero di quelli di 1485? ***Nota:*** *1, che divide tutti e tre i numeri, è contato tre volte; 2, che divide 144 e 1820, è contato due volte; 144, che divide 144, è contato una volta…*

B8. La corsa campestre del Liceo. Alla corsa campestre del Liceo Frisi si sono iscritti 20 concorrenti e fra questi Usain. Supponendo che non vi siano ex-aequo all'arrivo, ecco alcune domande:

i. Quanti podi (1°, 2° e 3° classificati) sono possibili?

ii. Quanti sono i podi possibili in cui Usain è primo?

iii. Quanti sono i podi possibili in cui Usain è sul podio?

iv. I primi tre classificati formeranno una squadra che parteciperà al Campionato provinciale. Quante squadre sono possibili?

B9. Le cifre dei coefficienti binomiali. Utilizzando una calcolatrice o un programma Python, determinate la somma dei tre numeri composti dalle ultime 4 cifre dei seguenti coefficienti binomiali

$$\binom{21}{9}, \binom{16}{7}, \binom{16}{8}$$

Nota: il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ vale $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
dove $n!$ significa il fattoriale di n: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

B10. Il problema del Maestro Sun (300 a. C.). "Siano dati degli oggetti in numero sconosciuto: se li mettiamo a 3 a 3 ne restano 2, se li mettiamo a 5 a 5 ne restano 3, se li mettiamo a 7 a 7 ne restano 2. Quanti oggetti abbiamo?"

i. Si chiede il numero minimo di oggetti che risolve il problema.

ii. Si può anche chiedere quale sia il terzo numero più piccolo che risolve il problema.

B11. Il sistema 3 x 3.
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 0 \end{cases}$$

i. Quanto vale la somma delle soluzioni x, y, z ?

ii. Si può anche chiedere quanto vale il modulo del prodotto delle soluzioni.

B12. La radice dell'equazione. Calcolate a meno di 0,001 la radice positiva maggiore di 1 dell'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$.

B13. Grafico + area. Tracciate il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$$

e poi determinate $\int_1^5 f(x)dx$ con 3 decimali esatti dopo la virgola.

Stabilite, inoltre, se il tratto di funzione nell'intervallo delle ascisse da 1 a 5 sia o una semicirconferenza o un tratto di parabola o un tratto di iperbole.

B14. La somma della serie. Determinate la somma della serie:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

B15. Il sistema 4 × 4. Risolvete il seguente sistema e determinate il prodotto delle soluzioni x, y, z, t.

$$\begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ 2x - y + 3z - 2t = 1 \\ x - y + 2t = 7 \\ 3x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

B16. I numeri amici. Si dice che due diversi numeri interi positivi sono *"amici"* quando la somma dei divisori propri di ognuno dei due è uguale alla somma dei divisori propri dell'altro, intendendo come divisori propri di un intero positivo n i numeri interi che lo dividono esattamente, 1 compreso ma n stesso escluso.
Ad esempio, i numeri 220 e 284 sono amici, poiché:

- i divisori di 220 (minori di 220, e 1 compreso) sono: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, la cui somma è 284;
- i divisori di 284 (minori di 284, e 1 compreso) sono: 1, 2, 4, 71 e 142, la cui somma è 220.

i. Sfruttando la seguente funzione, che restituisce la somma dei divisori propri del suo argomento n, sapreste scrivere un programma in Python per trovare e stampare tutte le coppie di *numeri amici* a e b, con $a < b \le N$, dato in input N intero positivo?

```
def somma_div(n):
  s = 0
  for k in range(1, n):
    if n%k == 0: # x%y  == resto intero di "x diviso y"
        s = s+k
  return s
```

ii. Qual è l'output di tale programma quando è dato $N = 1300$? Scrivete il numero più grande della coppia di numeri maggiore.

B17. I rettangoli simpatici. Siano a e b interi, con $0 < a \leq b$. Diciamo che il rettangolo di larghezza a e lunghezza b è *"simpatico"* quando la sua area è divisibile esattamente per il suo perimetro.

i. Definite una funzione in Python che, ricevuti come parametri due interi positivi a e b, con $a \leq b$, restituisca il valore di verità vero se e soltanto se a e b rappresentano larghezza e lunghezza di un *"rettangolo simpatico"*.

ii. Scrivete un programma che applichi la precedente funzione per determinare tutti i *rettangoli simpatici* di lunghezza $b = 1200$. Quanti sono ?

B18. I numeri primi gemelli. Una coppia di *"numeri primi gemelli"* è formata da due numeri primi la cui differenza è 2; la coppia più piccola è (3, 5), le due successive sono (5, 7) e (11, 13).

i. Eccetto (3, 5), tutte le coppie di *numeri primi gemelli* hanno la forma $(6k - 1, 6k + 1)$, per un qualche k intero positivo. Sarà vero il viceversa, cioè che qualsiasi coppia della forma $(6k - 1, 6k + 1)$, con k intero positivo, è una coppia di *numeri primi gemelli*? Se no, esibite un controesempio.

ii. Dimostrate che per ogni coppia di numeri primi gemelli, eccetto (3, 5), la somma dei due numeri che la compongono è divisibile per 12.

iii. Scrivete tutte le coppie di numeri primi gemelli successive a (11, 13), in cui entrambi i numeri siano minori di 100.

iv. Di seguito è riportata una semplice funzione che restituisce il valore di verità vero se e soltanto se il suo argomento è un numero primo:

```
def primo(n):       # Precondizione: n intero >= 2
    d = 2
    while n%d != 0: # n%d == resto intero di "n diviso d"
        d += 1
    return d == n
```

Scrivete un programma che, servendosi di questa funzione, stampi tutte le coppie di numeri primi gemelli in cui entrambi i numeri siano minori di un certo numero dato in input, e infine dica quante coppie sono state trovate. (Per mezzo di questo programma potete anche verificare la vostra risposta alla richiesta precedente.) Quante devono essere le coppie stampate, dando in input 1000?

Testi della selezione del 26 gennaio 2022

Rispondete alle 10 richieste scritte in rosso.
Le risposte corrette sono tutte **numeri interi**, al massimo **di 4 cifre**.

C1. Quesito 1 – Le marmellate

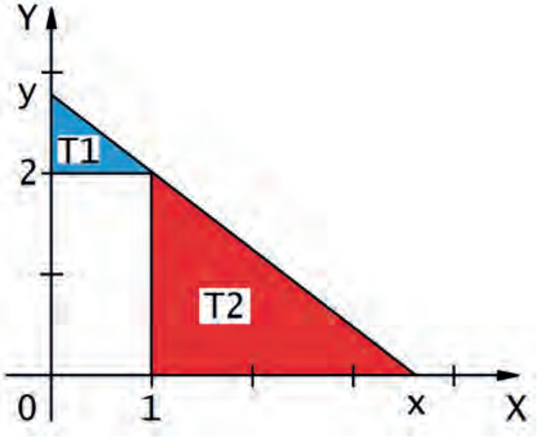
Un droghiere si rifornisce di barattoli di marmellata di quattro diversi tipi (albicocche, lamponi, more e arance) in parti uguali. Dopo una settimana, il droghiere constata i seguenti fatti:

- un quinto della marmellata di albicocche è stato venduto;
- è stata venduta tanta marmellata di lamponi quanta ne è ancora rimasta di more;
- i cinque quattordicesimi dei barattoli di marmellata invenduti sono di arance.

Quanti barattoli di marmellata di arance sono stati venduti?

C2. Quesito 2 – Due triangoli simili

In un riferimento cartesiano monometrico ortogonale XOY, consideriamo il punto (1; 2) e i due segmenti tra questo punto e i punti (1; 0) e (0; 2), rispettivamente; poi scegliamo un punto (x; 0), con $x > 1$, e tracciamo il segmento che lo unisce al punto (1; 2), prolungandolo fino a incontrare l'asse Y nel punto (0; y).



I due triangoli rettangoli T1 e T2 sono simili.

i. Esprimete l'area di T1 e l'area di T2 in funzione di x.
ii. ***Quanto vale il prodotto delle due aree?***

C3. Quesito 3 – La nostra società sportiva

Nella nostra società sportiva, che conta meno di un centinaio di iscritti, a gennaio è arrivata l'influenza… ma questo non ci ha impedito di continuare le nostre abituali attività! Il primo giorno mancava soltanto un socio, e ci siamo organizzati a gruppi di due. Il secondo giorno mancavano due soci, e abbiamo continuato a gruppi di tre. Il terzo giorno mancavano tre soci, e abbiamo deciso di proseguire a gruppi di quattro. Infine, il quarto giorno, mancavano quattro soci, e allora ci siamo divisi in gruppi di cinque.

Quanti sono in tutto gli iscritti alla nostra società sportiva?

C4. Quesito 4 – Una successione divergente

Definiamo la successione (di numeri razionali) $\{u_n\}$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, nel seguente modo:

$$u_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$$

(u_n è dunque la somma dei reciproci dei numeri naturali da 1 fino a n). Si tratta di una successione monotòna, strettamente crescente, in quanto $u_{n+1} - u_n = 1/(n + 1) > 0$; ma questo, come si sa, non basta per affermare che sia divergente…

Qual è il più piccolo n per cui $u_n \geq 4$?

C5. Quesito 5 – Il problema del compleanno

Vogliamo determinare la probabilità di questo evento: che, in un gruppo di n persone qualsiasi, ve ne siano almeno due che festeggiano il compleanno lo stesso giorno dello stesso mese. Poiché una persona nata il 29 febbraio di un anno bisestile festeggia (legalmente) il compleanno il 1° marzo, possiamo trascurare questo caso particolare, assumendo che l'anno sia di 365 giorni; naturalmente, assumiamo pure che i giorni siano tutti equiprobabili per le nascite.

i. Qual è il numero minimo di persone, affinché la probabilità di tale evento sia almeno il 50%?

ii. Qual è il numero minimo di persone, affinché la probabilità di tale evento sia almeno il 90%?

C6. Quesito 6 – Le tre piscine

Tre amici, il signor Verdi, il signor Bianchi e il signor Rossi, hanno ciascuno una villa con una piscina. Ciascuna piscina è triangolare; le lunghezze dei suoi tre lati, espresse in metri, sono date da tre numeri interi consecutivi, e anche l'area è espressa da un numero intero di metri quadrati.

La piscina del signor Verdi ha i lati di lunghezza 3, 4 e 5 metri, e la sua area è quindi di 6 metri quadrati.

La piscina del signor Bianchi è più grande, e quella del signor Rossi più grande ancora.

Sapendo che tra la piscina del signor Verdi e quella del signor Bianchi, così come tra quella del signor Bianchi e quella del signor Rossi, non vi possono essere altre piscine con le suddette caratteristiche, ***dite di quanti metri quadrati è l'area della piscina del signor Rossi.***

C7. Quesito 7 – Le potenze finali

Siano n e a due numeri interi maggiori di 1. Diciamo che n è una "*potenza finale di a*" se la sequenza di cifre decimali che rappresenta il numero n è precisamente la parte finale di quella che rappresenta il numero a^n. Ad esempio:

- 7 è una potenza finale di 3, poiché $3^7 = 2187$, numero che termina con 7;
- 36 è una potenza finale di 2, poiché $2^{36} = 68719476736$, numero che termina con 36;
- anche 736 è una potenza finale di 2, poiché 2^{736} è un numero (di 204 cifre) che termina con 736.

i. Scrivete un programma che, dato un numero intero $a \geq 2$, determini la più piccola *potenza finale* di a compresa nell'intervallo da 10 a 99, se c'è. *Suggerimento*: considerate la differenza $a^n - n$.

ii. Si chiede quale sia la somma dei risultati ottenuti da tre esecuzioni del programma: quando a = 2, quando a = 5, e quando a = 7 (in tutti e tre i casi, la minima potenza finale di a esiste ed è compresa nell'intervallo da 10 a 99).

C8. Quesito 8 – Una singolare suddivisione

Alla fine di un certo anno, un datore di lavoro volle premiare i suoi 27 dipendenti, e a tal fine stanziò una quota dei guadagni, che – se ben ricordiamo – era inferiore ai 150000 euro… ma non la distribuì equamente, bensì in un modo davvero singolare! Dapprima egli suddivise questa somma di denaro in tante parti: la prima di 1 euro, la seconda di 3, la terza di 5, e così via, aumentando ogni volta di 2 euro; poi assegnò l'ultima parte – quella col maggior numero di euro – al primo dipendente, le due parti precedenti al secondo dipendente, le tre parti ancora precedenti al terzo dipendente, e così via sino al 27-esimo dipendente, al quale toccarono le 27 parti rimaste, ossia quelle che erano le prime 27 della suddivisione da lui fatta.

i. Complessivamente, di quanti euro era inferiore a 150000 la somma totale distribuita ai dipendenti?

ii. Nel corso degli anni, l'azienda ha prosperato, i dipendenti sono di più e i guadagni sono saliti alle stelle, sicché il datore di lavoro dispone ora di oltre un milione di euro, per la precisione 1071225, da distribuire ai suoi dipendenti, applicando ancora la stessa procedura. Quanti sono adesso i dipendenti?

La finale nazionale del 3 maggio 2022

Rispondete alle 13 richieste scritte in rosso.
Le risposte corrette sono tutte **numeri interi**, al massimo di **4 cifre**.

D1. Quesito 1 – Se si toglie la prima cifra…
Qual è il più piccolo intero che diventa 57 volte più piccolo quando gli togliamo la prima cifra?

D2. Quesito 2 – Un numero un po' particolare
Trovate il numero di 4 cifre *abcd* (diverse da 0) che verifica $4 \cdot abcd = dcba$.

D3. Quesito 3 – La sesta potenza
La sesta potenza di un numero intero è un numero di 9 cifre. Sistemando le 9 cifre in ordine decrescente, il risultato è 988.744.320.
Qual è il numero iniziale di cui abbiamo calcolato la sesta potenza?

D4. Quesito 4 – I Cavalieri della Tavola Rotonda
Re Artù deve decidere quali dei suoi 2021 cavalieri partiranno per una importante missione. Si siedono tutti (2022) intorno alla grande Tavola Rotonda; Re Artù naturalmente resta, mentre il cavaliere seduto alla sua sinistra partirà e pertanto si alza e si allontana dalla tavola, il successivo resta, il successivo ancora si alza e va a prepararsi alla partenza… e così via, procedendo sempre in senso orario. Quando toccherebbe a Re Artù partire, la selezione dei cavalieri si ferma; Re Artù e i cavalieri ancora seduti restano a difendere il castello di Camelot.
Quanti cavalieri, compreso Re Artù, rimangono al castello?

D5. Quesito 5 – Quadrati palindromi
Calcoliamo la somma dei quadrati degli interi positivi, nell'ordine: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$. Ci fermiamo la prima volta che, dopo aver sommato il quadrato di un numero palindromo di almeno due cifre, otteniamo come somma dei quadrati ancora un numero palindromo.
Qual è l'ultimo numero di cui abbiamo sommato il quadrato?

D6. Quesito 6 – Le radici reali di un'equazione…
Trovate la somma dei valori assoluti delle radici reali dell'equazione

$$4x^{11}+4x^{10}-21x^9-21x^8+17x^7+17x^6+17x^5+17x^4-21x^3-21x^2+4x+4=0.$$

D7. Quesito 7 – Le soluzioni intere
Trovate la coppia di soluzioni intere non negative (x, y), oltre a (0, 2), che verifica l'equazione

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3.$$

[Scrivete la coppia come unico numero: ad esempio, se la risposta fosse (17, 22), scrivete 1722.]

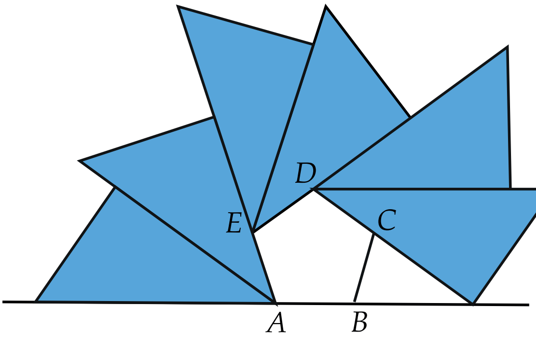
D8. Quesito 8 – A salto di cavallo
Collochiamo un cavallo su una casa di una scacchiera infinita.
Quante case può raggiungere dopo esattamente 30 mosse?
Notate che dopo esattamente due mosse il cavallo può tornare alla casa di partenza, dopo esattamente tre mosse può tornare su una delle case raggiunte con la prima mossa, eccetera.
Suggerimento: per calcolare il numero di case (distinte) raggiungibili in esattamente n mosse, quando n è maggiore di 2, considerate l'ottagono (inscritto nel quadrato di lato $4n + 1$) che ha su ciascun lato $n + 1$ case di colore c, dove c è lo stesso colore della casa di partenza del cavallo se n è pari, colore opposto se n è dispari.

D9. Quesito 9 – Il numero della strega
Una strega sceglie un numero intero positivo di 4 cifre. Sergio sceglie un altro intero positivo e somma il quadrato di questo con il numero della strega. Pietro sceglie a sua volta un intero positivo e moltiplica il quadrato di questo per il numero della strega. Il prodotto tra il risultato del calcolo di Sergio e il risultato del calcolo di Pietro è 123.456.789.
Qual è il numero della strega?

D10. Quesito 10 – I venti depositi bancari

Un petroliere texano, che amava la teoria dei numeri, aprì un conto bancario depositando un certo numero intero (positivo) x di dollari. Il suo secondo deposito, denotato da y, era anch'esso un numero intero (positivo) di dollari. In seguito, ogni deposito era la somma dei due depositi precedenti. Il suo ventesimo deposito fu esattamente di un milione di dollari.
Quali sono i valori x e y dei suoi primi due depositi?
[Scrivete il valore del suo terzo deposito (somma del primo e del secondo).]

D11. Quesito 11 – Il Sangaku



Questo Sangaku, enigma geometrico giapponese, è relativamente "recente" visto che data dal 1912, fine dell'era Meiji.
Si considera un pentagono regolare (*ABCDE*) attorno al quale si sviluppa un ventaglio di sei triangoli rettangoli isometrici, come mostra la figura. Sapendo che il lato del pentagono misura 1000 (unità di misura), qual è la lunghezza (arrotondata all'intero) dell'ipotenusa di ciascun triangolo?

D12. Quesito 12 – Numerazione basca

Ecco un certo numero di moltiplicazioni scritte nella lingua basca:

bi × bi = lau
bi × bost = hamar
bi × hamar = hogei
hiru × bost = hamabost
hiru × hamar = hogeita hamar

bost × bost = hogeita bost
bost × zazpi = hogeita hamabost
zazpi × bederatzi = hirurogeita hiru
zazpi × hamar = hirurogeita hamar

Il basco è parlato da 5 - 600.000 persone in Francia e Spagna e da circa 170.000 persone in Sud America. Non è stato dimostrato che sia correlato a qualche altra lingua.
Si chiede quanto valga la somma dei risultati delle due moltiplicazioni riportate qui sotto

zazpi × hamar + bederatzi × hamar =

[Scrivete la risposta come numero intero in cifre decimali.]

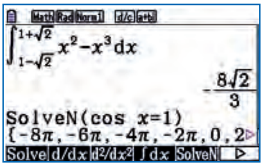
D13. Quesito 13 - Un calcolo combinatorio
A conclusione di una vecchia storia a fumetti – pubblicata nel 1959 – mirabilmente disegnata da Luciano Bottaro e sceneggiata da Guido Martina, una scacchiera magica va in pezzi, scomponendosi nelle 64 case: naturalmente per colpa di Paperino, che la spacca sulla testa di Gastone! Affinché possa riacquistare le sue magiche proprietà, la scacchiera deve essere riassemblata esattamente com'era prima, con ciascuna casa disposta nello stesso identico modo rispetto a tutte le altre. Dai disegni appare evidente che ogni casa, bianca o nera che sia, è colorata su entrambe le facce, e quindi 8 sono gli orientamenti che può assumere.
E così Zio Paperone, proprietario della scacchiera, pretende che i nipoti Paperino e Gastone provino a una a una le possibili configurazioni, sino a trovare quella giusta! Nell'ultima vignetta, Archimede Pitagorico ne azzarda il numero… Guido Martina era sì un fine letterato, ma non un matematico, sicché il risultato enunciato da Archimede è inferiore di molti ordini di grandezza rispetto a quello reale. Forse, grazie alla fortuna di Gastone…
Ma quante sono le "diverse" scacchiere che si possono ottenere ricomponendo le 64 case?
[Scrivete le prime quattro cifre di questo numero.]

“CHE COS’È UNA CALCOLATRICE GRAFICA

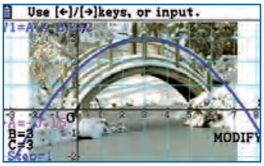
Secondo la definizione del Ministero dell’Istruzione, con “calcolatrice grafica” si intende un dispositivo elettronico con funzioni essenziali di calcolo matematico e statistico che permette di effettuare rappresentazione di grafici, tabelle e diagrammi, che non ha bisogno di essere collegata alla rete elettrica e non è dotata di connessione wireless.”

CASIO FX-CG50

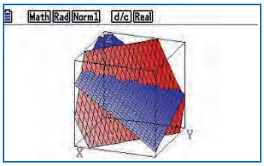
- > Display naturale con 65.000 colori
- > Senza CAS (Computer Algebra System)
- > Risoluzione di equazioni, sistemi di equazioni lineari
- > Costruzione e manipolazione di grafici e tabelle
- > Calcoli in ambito reale e complesso
- > Calcolo vettoriale e matriciale
- > Elaborazioni statistiche a 1 e 2 variabili
- > Menù di disegno geometrico e foglio di calcolo
- > Grafici dinamici e 3D



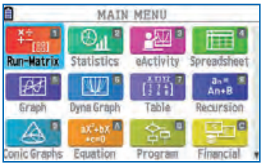
DISPLAY NATURALE



FUNZIONE PICTURE PLOT



GRAFICI 3D



MENÙ A ICONE

Tutte le soluzioni

A1. Il problema di Collatz

1. Il volo di 11 è la lista costituita dai numeri 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Il tempo di volo di 11 è 14, la “lunghezza” di questa lista. L’altezza massima del volo di 11 è 52, il numero più grande in questa lista.
2. Ecco un programma in Python che permette di calcolare tutti i risultati relativi al volo di un naturale N (> 1) dato in input.

```
N = int(input("N = "))
Tempo_di_volo = 0
Altezza_massima = N
while N != 1:
   if N%2 == 0:
       N = N//2
   else:
       N = 3*N + 1
   print N
   if N > Altezza_massima:
       Altezza_massima = N
   Tempo_di_volo = Tempo_di_volo + 1
print "Tempo di volo = ", Tempo_di_volo
print "Altezza massima = ", Altezza_massima
```

3. Se provate questo algoritmo per $N = 23$, constaterete che il tempo di volo è 15, gli ultimi nove elementi del volo coincidono con quelli di 11, mentre l’altezza massima è 160. La stessa altezza massima si riscontra nel volo di 15, con un tempo maggiore di due unità: infatti, da 15 si sale a 46 = 15 x 3 + 1 e quindi si scende proprio a 23. Infine, con $N = 127$, si ha un tempo di volo maggiore (46) e si raggiunge l’altezza massima 4372.

*Non si sa se questa procedura termini prima o poi (col valore 1) per ogni numero N comunque grande. Si pensa di sì, e colui che formulò questa congettura fu il matematico tedesco **Lothar Collatz, nel 1937**. Se desiderate approfondire la questione e conoscere alcuni notevoli record (di tempo e di altezza del volo), potete consultare la pagina web*

http://www.ericr.nl/wondrous/index.html

intitolata ***On the 3x + 1 problem*** *e curata da Eric Roosendaal.*

A2. Calcolo di un limite

1. Entrambi i limiti sono uguali a 0, e dunque il limite della funzione data si presenta nella forma indeterminata “0/0”.

2. Se costruiamo una tabella con valori di x prossimi a 2 e li sostituiamo nella funzione otteniamo:

1,9	10,41
2,1	11,61

1,99	10,9401
2,01	11,0601
1,999	10,994001
2.001	11,006001
1,9999	10,99940001
2,0001	11,00060001

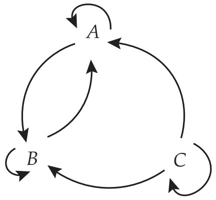
Da questi risultati possiamo congetturare che la soluzione sia 11.

3. Poiché sviluppando il prodotto $(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 3)$ si ottiene proprio il polinomio a numeratore di $f(x)$, la funzione stessa coincide col trinomio $x^2 + 2x + 3$, ad eccezione del punto $x = 2$, dove $f(x)$ non è definita, mentre $x^2 + 2x + 3$ ha valore $4 + 4 + 3 = 11$.

A margine, osserviamo che, essendo soddisfatte le ipotesi del ***teorema di de l'Hôpital****, si poteva calcolare il limite del rapporto delle derivate dei polinomi a numeratore e denominatore di* $f(x)$*, rispettivamente* $3 \cdot x^2 - 1$ *e 1, ottenendo ancora* $3 \cdot 4 - 1 = 11$.

A3. Flusso di popolazioni

I flussi delle popolazioni da un anno all'altro fra le tre zone si possono rappresentare mediante uno schema, come qui sotto disegnato.



1. Secondo le indicazioni del testo, dette a_0, b_0 e c_0 le popolazioni delle tre zone A, B e C al primo gennaio 2020, per ogni naturale n si ha:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,1b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,9b_n + 0,12c_n \\ c_{n+1} = 0,76c_n \end{cases}$$

dove il pedice indica il numero di anni trascorsi dall'inizio del 2020. Diminuire una quantità del 20% equivale infatti a moltiplicarla per 0,8; diminuire una quantità del 24% equivale a moltiplicarla per 0,76 eccetera.

La popolazione totale delle tre zone rimane costante; infatti, sommando membro a membro le tre uguaglianze scritte sopra, si ottiene:

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \text{ per ogni naturale } n.$$

2. Scriviamo un programma in Python che calcoli la numerosità delle tre popolazioni all'inizio di ogni anno, dal 2020 in poi, per un opportuno numero di anni.

```
anno = 2020; A = 6000; B = 1000; C = 3000
print "anno\tA\tB\tC\n"
print anno, "\t", A, "\t", B, "\t", C
for n in range(40):
    anno += 1
    a = 0.8*A + 0.1*B + 0.12*C
    b = 0.2*A + 0.9*B + 0.12*C
    A = a
    B = b
    C = 0.76*C
    print anno,"\t",int(round(A)),"\t",int(round(B)),\
                "\t",int(round(C))
```

Eseguendolo, si ottiene il seguente output:

anno	A	B	C
2020	6000	1000	3000
2021	5260	2460	2280
2022	4728	3540	1733
2023	4344	4339	1317
2024	4067	4932	1001
2025	3867	5372	761
2026	3722	5700	578
2027	3617	5944	439
2028	3541	6125	334
2029	3485	6261	254
2030	3445	6362	193
2031	3415	6438	147
2032	3394	6495	111
2033	3378	6538	85
2034	3366	6570	64
2035	3358	6594	49
2036	3351	6612	37
2037	3347	6625	28
2038	3343	6635	21
2039	3341	6643	16
2040	3339	6649	12
2041	3337	6653	9
2042	3336	6656	7
2043	3336	6659	5
2044	3335	6661	4
2045	3335	6662	3
2046	3334	6663	2
2047	3334	6664	2
2048	3334	6665	1
2049	3334	6665	1
2050	3334	6666	1
2051	3334	6666	1

2052	**3334**	**6666**	**0**
2053	**3333**	**6666**	**0**
2054	**3333**	**6666**	**0**
2055	**3333**	**6666**	**0**
2056	**3333**	**6666**	**0**
2057	**3333**	**6667**	**0**
2058	**3333**	**6667**	**0**
2059	**3333**	**6667**	**0**
2060	**3333**	**6667**	**0**

In particolare, notiamo che al 1° gennaio 2033 la popolazione delle zone A, B e C è di 3378, 6538 e 85 abitanti, rispettivamente… ma la somma è 10001: si è aggiunto un abitante?! È importante notare che i calcoli vengono svolti "*in reale*", e soltanto i risultati visualizzati sono arrotondati agli interi: così facendo, può apparire temporaneamente l'"*acquisto*" o la "*perdita*" di una persona, ma dall'anno 2057 in poi le cose non cambiano più, e il totale è proprio 10000. Visto che i valori si stabilizzano rispettivamente su 3333, 6667 e 0, possiamo pensare che, a partire dal 2057, quelli scritti siano proprio i numeri degli abitanti delle tre zone.

3. Per ogni naturale n, $c_{n+1} = 0{,}76\, c_n$ ovvero $\{ c_n \}$ è una successione geometrica di ragione minore di 1, e dunque converge a 0 al crescere di n. In particolare:
$c_n = c_0\,(0{,}76)^n$, con $c_0 = 3000$.
Osservando l'espressione di a_n data da

$$a_n = \frac{10000}{3}(10 + 5 \cdot (0,7)^n + (0,76)^n)$$

notiamo che pure qui compaiono due successioni geometriche di ragione rispettivamente 0,7 e 0,76, minori di 1, che quindi tendono a 0 per n che tende all'infinito. Ricaviamo dunque:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{10000}{3} \cong 3333$$

risultato che concorda con quanto ricavato sperimentalmente al punto precedente.
Ricordiamo che la popolazione delle tre zone è costante, dunque la successione $\{a_n + b_n + c_n\}$ è costante e il suo valore corrisponde ad

$$a_0 + b_0 + c_0 = 6000 + 1000 + 3000 = 10000,$$

ossia, per ogni naturale n, $a_n + b_n + c_n = 10000$ (sempre nel dominio dei numeri reali), da cui: $b_n = 10000 - a_n - c_n$ e dunque si ha:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 10000 - \frac{10000}{3} \cong 6667$$

concordemente a quanto già previsto.

A4. Tangenti

Poiché C_1 ha equazione $y = e^x$ e C_2 ha equazione $y = e^{-x}$, si ricavano immediatamente le coordinate dei punti M e N: $M\,(a; e^a)$ e $N\,(a; e^{-a})$.

1. Il coefficiente angolare della retta T_1, tangente a C_1 in M, è il valore della derivata di C_1 in M, ossia e^a. Analogamente, il coefficiente angolare della retta T_2, tangente a C_2 in N, è il valore della derivata di C_2 in N, ossia $-e^{-a} = -1/e^a$. Ecco allora che i due coefficienti angolari sono uno l'opposto dell'inverso dell'altro, e dunque le due rette T_1 e T_2 sono fra loro perpendicolari.
2. Si ricavano facilmente le equazioni delle rette T_1 e T_2:
   T_1 passa per M e ha coefficiente angolare e^a, dunque ha equazione
   $y - e^a = e^a(x - a)$, ovvero $y = e^a(x - a + 1)$;
   T_2 passa per N e ha coefficiente angolare $-e^{-a}$, dunque ha equazione
   $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$, ovvero $y = -e^{-a}(x - a - 1)$.
   Il punto P appartiene all'asse delle ascisse e alla retta T_1, quindi ha coordinate $P(a - 1; 0)$.
   Il punto Q appartiene all'asse delle ascisse e alla retta T_2, quindi ha coordinate $Q(a + 1; 0)$.
   La distanza PQ è data dal modulo della differenza tra le rispettive ascisse, avendo i due punti la stessa ordinata:
   $PQ = |(a+1) - (a-1)| = |a + 1 - a + 1| = 2$.

B1. La percentuale. 80. Infatti, dire che x è il 250% di y significa che $x = 2{,}5y$, e quindi $2y = 2x/2{,}5 = 0{,}8x$.

B2. Gli alberi nel vivaio. 96. Detto x il numero degli alberi, x deve essere multiplo sia di 3 sia di 4, e dunque anche di 12, e l'unico multiplo di 12 maggiore di 90 e minore di 100 è 96. Quindi i meli sono 32, i peri 24 e i ciliegi 40.

B3. Il test di 30 domande. 7. Dette x e y le risposte esatte e quelle errate, rispettivamente, si ottiene il sistema di due equazioni: $x + y = 30$, $7x - 12y = 77$, la cui soluzione è: $x = 23$, $y = 7$.

B4. La grande moltiplicazione. 2026. Immaginando di svolgere il calcolo a mano, nel modo tradizionale, scriveremmo:

```
      111111......111111 ×
                    1999 =
______________________________
        99.........9999999
      999.........999999
    9999.........99999
  11111.........1111
______________________________
  22211.........1110889
```

Il prodotto è formato da una sequenza di 2002 cifre decimali: 3 cifre “2”, 1995 cifre “1”, una cifra “0”, 2 cifre “8” e una cifra “9”. La somma delle cifre è dunque 6 + 1995 + 16 + 9 = 2026.

B5. Il treno in galleria. 18. Dall’istante in cui la testa del treno entra in galleria all’istante in cui la coda del treno esce dalla galleria, il treno ha percorso esattamente (800 + 200) m = 1 km; viaggiando a 200 km/h, il treno percorre 1 km in (1 km)/(200 km/h) = (1/200) h = (3600/200) s = 18 s.

B6. Il libro di 2000 pagine. 600. Nella numerazione delle pagine di un libro di 10^{n+1} pagine, la cifra “9” è scritta esattamente $(n + 1) \cdot 10^n$ volte. Nel caso di un libro di 1000 pagine ($n = 2$), il numero di volte è 300, che raddoppia se le pagine sono 2000; si noti che ben diverso sarebbe questo incremento, qualora si considerassero le occorrenze della cifra “1”…

B7. I divisori. 55. Si può calcolare applicando tre volte una funzione in Python opportunamente definita:

```
def conta_div(n):  # numero dei divisori di n, da 1 a n compresi
    c = 0
    for k in range(1, n+1):
        if n%k == 0:  # n%k  == resto intero di "n diviso k"
            c += 1
    return c

print conta_div(144) + conta_div(1820) + conta_div(1485)
```

B8. La corsa campestre del Liceo. *i*. **6840** = 20 × 19 × 18. *ii*. **342** = 19 × 18. *iii*. **1026** = 342 × 3. *iv*. **1140**: è il coefficiente binomiale $\binom{20}{3}$; si veda il quesito successivo.

B9. Le cifre dei coefficienti binomiali. 8240. I coefficienti binomiali dati valgono rispettivamente: 293.930, 11.440, 12.870; considerando soltanto le ultime quattro cifre di ciascuno, si ottiene: 3.930 + 1.440 + 2.870 = 8.240.

B10. Il problema del Maestro Sun (300 a. C.). ***i.* 23.** ***ii.* 233** = 23 + 105 × 2. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 7) \end{cases} \quad \text{la cui soluzione è} \quad x \equiv 23 \ (mod\ 105)$$

B11. Il sistema 3 x 3. ***i.* 3.** Infatti: $x = 9$, $y = -36$, $z = 30$ e $9 - 36 + 30 = 3$.
***ii.* 9720.**

B12. La radice dell'equazione. 1,532. Utilizzando una calcolatrice, si inseriscono i coefficienti e si trovano le tre radici reali. Si cerca poi quale sia la radice reale maggiore di 1 e si scrive la soluzione a meno di 0,001. La calcolatrice presenta le tre radici seguenti: $x_1 = -1{,}879385242$; $x_2 = 0{,}3472963553$; $x_3 = 1{,}532088886$.

B13. Grafico + area. 6,283. $f(x)$ tra 1 e 5 è una semicirconferenza di centro (3; 0) e raggio 2. Dunque, l'area tra 1 e 5 vale l'area del semicerchio, ossia $2\pi \cong 6,283$.

B14. La somma della serie. 4/3. Si tratta infatti della serie geometrica di ragione 1/2, ossia $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3}(1/2)^n$.

B15. Il sistema 4 × 4. 24. Le soluzioni del sistema sono $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$, il cui prodotto è 24.

B16. I numeri amici.
i. Ecco un programma in Python, che stampa le coppie di numeri amici non superiori a N:

```
N = input('N = ')
for i in range(1, N):
   for j in range(i+1, N+1):
       if somma_div(i) == j and somma_div(j) == i:
           print i, j
```

ii. Eseguito con $N = 1300$, stampa le due coppie: 220, 284; 1184, 1210. (La successiva è 2620, 2924.) **Quindi il numero da scrivere è 1210.**

Una nota storica. 220 *e* ***284*** *formano l'unica coppia di* ***numeri amici*** *già* ***nota ai pitagorici****. Nel IX secolo, il matematico arabo* ***Thābit ibn Qurra*** *trovò una condizione sufficiente per ricavare coppie di numeri amici, riscoperta da* ***Fermat*** *e* ***Cartesio*** *nel XVII secolo, e generalizzata poi da* ***Eulero*** *(fate una ricerca a questo proposito!), sicché furono individuate decine di coppie di numeri amici; tuttavia, curiosamente, soltanto nel 1866 un giovane studente, omonimo del celebre violinista Niccolò Paganini, trovò la seconda coppia più piccola di numeri amici, non ancora* *scoperta:* ***1184*** *e* ***1210****. Ma neppur oggi si conosce una formula o un metodo generale per determinare le coppie di numeri amici. E non si sa nemmeno se tali coppie siano un'infinità, né se siano infiniti i numeri perfetti (un numero è detto perfetto quando è amico di sé stesso, vale a dire quando è uguale alla somma dei suoi divisori propri).*

B17. I rettangoli simpatici.

i. Ecco una funzione in Python che, in un solo comando, soddisfa la richiesta:

```
def simpatico(a, b):    # a e b interi positivi, a <= b
    return (a*b)%(2*(a+b)) == 0
```

ii. Poiché la larghezza minima è 1 mentre la massima è pari alla lunghezza, possiamo procedere per esaurimento:

```
b = input('b = ')    # b > 0, lunghezza del rettangolo
for a in range(1, b+1):
   if simpatico(a, b):
      print a, b
```

L'esecuzione di questo programma, con input 1200, dà il seguente output:

50	1200
240	1200
300	1200
400	1200
600	1200
675	1200
720	1200
800	1200
1050	1200
1200	1200

Dieci sono dunque i rettangoli simpatici di lunghezza 1200.

B18. I numeri primi gemelli.

i. È facile provare che ogni numero primo maggiore di 6 può essere scritto o come $6k + 1$ o come $6k + 5$ con k intero positivo (infatti $6k$, $6k + 2$ e $6k + 4$ sono divisibili per 2, e $6k + 3$ è divisibile per 3, e perciò non sono primi). Poiché $6k + 5 = 6k - 1$ (modulo 6), ogni numero primo maggiore o uguale a 5 può essere scritto o come $6k - 1$ o come $6k + 1$, con k intero positivo. E quindi ogni coppia di numeri primi gemelli deve essere della forma $(6k - 1, 6k + 1)$, per un qualche k intero positivo. Il viceversa chiaramente non è vero: come controesempio si può porre $k = 4$, dato che 25 non è primo.
ii. Se $(6k - 1, 6k + 1)$ è una coppia di numeri primi gemelli, la somma dei due è 12k, multiplo di 12, e quindi divisibile per 12.
iii. Le coppie richieste sono cinque: (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).

iv. Grazie al seguente programma, si può appurare che 35 sono le coppie di numeri primi gemelli formate da numeri minori di 1000.

```
m = input('Minori di ')
n = 0
p = 3
for i in range(5, m, 2):
    if primo(i):
        if i == p+2:
            print '(', p, ',', i, ')'
            n += 1
        p = i
print 'stampate', n, 'coppie'
```

Una nota storica. *È stato congetturato (ma non dimostrato) che le **coppie di numeri primi gemelli** siano un'infinità. Già **Euclide** diede una semplice ed elegante dimostrazione dell'infinità dei numeri primi; **Eulero** ne formulò una diversa, provando che la somma dei reciproci dei numeri primi diverge. Nel 1919, il matematico norvegese **Viggo Brun** mostrò che la somma dei reciproci di tutti i numeri primi appartenenti a coppie di gemelli converge invece a una costante, della quale sono state calcolate le prime cifre decimali: 1,90216058 (il reciproco di 5, l'unico intero che appartiene a due coppie di gemelli, è sommato due volte).*

C1. – Le marmellate

Nessuno, cioè 0. I barattoli dei diversi tipi di marmellata sono inizialmente in ugual numero; supponiamo che siano 50 per tipo. Allora, la prima informazione ci dice che sono rimasti 40 barattoli di marmellata di albicocche. La seconda informazione ci permette di affermare che, tra lamponi e more, ci sono ancora 50 barattoli. Detto x il numero di barattoli di marmellata di arance ancora invenduti, la terza informazione ci porta a scrivere l'equazione $(5/14) \cdot (40 + 50 + x) = x$, da cui si ricava $x = 50$. Quindi nessun barattolo di marmellata di arance è stato ancora venduto.
La formulazione del quesito potrebbe apparire incompleta, mancando il numero iniziale dei barattoli; tuttavia, le informazioni date permettono di rispondere in modo univoco alla richiesta.

C2. – Due triangoli simili

i. Poiché il rapporto tra i due cateti è lo stesso per i due triangoli, si ha che $(y - 2) : 1 = 2 : (x - 1)$. Esprimendo le aree dei triangoli in unità al quadrato,

l'area di T1 è $(y - 2) / 2 = 1 / (x - 1)$, mentre l'area di T2 è $(x - 1)$.
ii. **Il prodotto delle due aree vale dunque 1** (unità alla quarta potenza), indipendentemente da x.
Si osservi che, quando x tende a 1 (per valori comunque maggiori, poiché $x > 1$), l'area di T1 tende all'infinito, quella di T2 a zero; viceversa, quando x tende all'infinito (per valori sempre più grandi di 1), l'area di T1 tende a zero, quella di T2 all'infinito.

C3. – La nostra società sportiva

I soci sono 59. Detto N il numero dei soci, le informazioni relative alle quattro giornate permettono di scrivere le seguenti quattro equazioni:

$N = 2k_1 + 1$
$N = 3k_2 + 2$
$N = 4k_3 + 3$
$N = 5k_4 + 4$

dove k_1, k_2, k_3 e k_4 sono interi positivi. Da queste equazioni, N è determinato a meno di multipli di 60, il minimo comune multiplo di 2, 3, 4 e 5. Infatti, la prima equazione stabilisce che N è dispari, e quindi, in base alla quarta equazione ($N - 4$ è un multiplo di 5), i candidati possibili sono 9, 19, 29, 39, …, 99 (e qui ci fermiamo, poiché sappiamo che i soci non arrivano al centinaio); la terza equazione ($N - 3$ è un multiplo di 4) esclude da questo elenco 9, 29, 49, 69 e 89; la seconda equazione ($N - 2$ è un multiplo di 3) esclude anche 19, 39, 79 e 99. Pertanto, l'unica possibilità rimane 59. (In generale, le soluzioni del sistema sono: $N = 59 + 60k$, con k intero maggiore o uguale a 0, e 59 è la sola inferiore a 100.)

C4. – Una successione divergente

Ecco un programma in Python per calcolare il più piccolo n tale che u_n raggiunge o supera una data soglia:

```
soglia = input('u(n) >= ')    # inserire un numero reale, > 0
n = 0
s = 0.0
while s < soglia:
     n += 1
     s += 1.0/n
print 'n = ', n
```

Eseguendo questo **programma con input 4, si ottiene 31**. Eseguendolo altre quattro volte, con input 5, 10, 15 e 20, i risultati sono, rispettivamente, 83, 12367, 1835421 e 272400600; in effetti, la crescita di questi termini u_n (che sono *le somme parziali della serie armonica*) è assai lenta, sebbene prosegua illimitatamente! Per dimostrare la divergenza di questa serie, si prova anzitutto che, per ogni n intero positivo, $u_{2n} - u_n \geq 1/2$; infatti: $u_{2n} - u_n = 1/(n + 1) + 1/(n + 2) + \ldots + 1/(2n) \geq 1/(2n) + 1/(2n) + \ldots + 1/(2n) = n \cdot 1/(2n) = 1/2$.

C5. – Il problema del compleanno

Calcoliamo dapprima la probabilità che, nel gruppo di n persone, nessuna festeggi il compleanno nella stessa data di un'altra. Se $n = 1$, tale probabilità è 1 (evento certo); se $n = 2$, è $1 \cdot (1 - 1/365)$: la probabilità che il compleanno della seconda persona non coincida con quello della prima; se $n = 3$, è $1 \cdot (1 - 1/365) \cdot (1 - 2/365)$: la probabilità che la terza persona non condivida il compleanno con nessuna delle prime due, e così via. Dunque, la probabilità che, nel gruppo di n persone, ve ne siano almeno due che festeggiano il compleanno nella stessa data è la complementare di quella testé calcolata, ossia:

$$1 - 1 \cdot (1 - 1/365) \cdot (1 - 2/365) \cdot \ldots \cdot (1 - (n - 1)/365) = 1 - 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)/365^n.$$

Si noti che, quando $n \geq 366$, il prodotto al numeratore della frazione si annulla, e quindi la probabilità è 1, com'è giusto che sia.
Definiamo dapprima una funzione in Python che, dato il numero n di persone, restituisca questa probabilità (evitando, per giunta, l'operazione di elevamento a potenza e i conseguenti problemi di overflow):

```
def P(n):     # n intero, > 0
    prod = 1.0
    for k in range(n):
        prod *= (365.0 – k)/365.0
    return 1.0 - prod
```

(Però, quando è applicata a valori maggiori di 134, questa funzione dà già 1.0 come risultato approssimato.)
Definiamo poi un'altra funzione che, dato un numero p compreso tra 0 e 1, calcoli – richiamando la funzione precedente – quante persone si devono considerare per avere una probabilità maggiore o uguale a p che almeno due di esse festeggino il compleanno nella stessa data:

```
def compleanno(p):    # p reale, > 0 e < 1
    n = 2
    while P(n) < p:
        n += 1
    return n
```

i. **Applicata a 0.5, la funzione qui denominata "compleanno" restituisce 23**: ciò significa che è sufficiente radunare 23 persone, per avere una probabilità maggiore o uguale al 50% che almeno due di esse festeggino il compleanno nella stessa data. Questo risultato sorprende, poiché ci si aspetterebbe un numero di persone assai più elevato: proprio per il fatto che il senso comune induce a pensare diversamente da quanto si può provare applicando le leggi matematiche, il problema in oggetto – posto in origine da Richard von Mises, nel 1939 – è anche chiamato (impropriamente) "*paradosso del compleanno*".

ii. **Analogamente, se applichiamo la funzione "compleanno" a 0.9, otteniamo 41.** Questo vuol dire che, considerando un gruppo di 41 persone, abbiamo almeno il 90% di probabilità che due di esse festeggino il compleanno nella stessa data.
Proseguendo, possiamo appurare che, per arrivare al 99%, ci vogliono 57 persone. Provate a tracciare il grafico della funzione "*compleanno*", o almeno a produrne i valori in una tabella, per p da 0.01 a 0.99, con passo 0.01.

C6. – Le tre piscine

1170. Dette x, $x + 1$ e $x + 2$ le lunghezze dei tre lati di una piscina con le caratteristiche specificate, il suo semiperimetro è $p = (x + x + 1 + x + 2) \ / \ 2 = 3 \cdot (x + 1) \ / \ 2$ e, ***per la formula di Erone***, la sua area è data dalla radice quadrata del prodotto $p \cdot (p - x) \cdot (p - x - 1) \cdot (p - x - 2) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \ / \ 16$.
I primi valori interi attribuibili a x, affinché quest'ultima espressione risulti un quadrato perfetto, sono 3 (la piscina del signor Verdi, di 6 metri quadrati), 13 (la piscina del signor Bianchi, di 84 metri quadrati) e 51 (la piscina del signor Rossi, di 1170 metri quadrati). Potete verificarlo scrivendo un apposito programma in Python!

C7. – Le potenze finali

i. Se n è compreso nell'intervallo da 10 a 99, vuol dire che ha due cifre decimali. In tal caso, affinché n sia una potenza finale di a, è sufficiente, oltre che necessario, che $a^n - n$ sia divisibile per 100. Grazie a questa proprietà, possiamo quindi scrivere un programma in Python come segue:

```
a = input('a = ')     # a intero, > 1
p = a**9
trovato = False
for n in range(10, 100):
    p = p*a
    if (p-n)%100 == 0:
        trovato = True
        print 'n = ', n
        break
if not trovato:
    print 'Nessun n di due cifre.'
```

ii. **Eseguito con input 2 o 5 o 7, questo programma stampa in output i numeri 36 o 25 o 43, rispettivamente. La somma di questi tre risultati è dunque 104.**
Un'osservazione: si vede facilmente che, se n è un numero di $k \geq 2$ cifre decimali ed è una potenza finale di a, allora $a^n - n$ è divisibile per 100. Infatti, poiché $n \geq 10$ e $a \geq 2$, a^n ha almeno quattro cifre, di cui le ultime k sono le stesse di n, sicché le ultime k cifre di $a^n - n$ sono tutte 0. Il viceversa non è vero, in generale, quando n ha più di due cifre: ad esempio, gli interi che si ottengono elevando 2 all'esponente 136 o 236 o 336 o 436 o 536 o 636 o 836 o

936 hanno come ultime tre cifre 736, e dunque nessuno di tali esponenti è potenza finale di 2; tuttavia, se da essi si sottraggono i rispettivi esponenti, le differenze risultanti terminano tutte con due cifre 0, e quindi sono divisibili esattamente per 100.

C8. – Una singolare suddivisione

i. Una osservazione immediata: affinché possano essere distribuite nel modo indicato ai 27 dipendenti, le parti devono essere in tutto 1 + 2 + 3 + … + 27, e costituite da 1, 3, 5, 7, 9, … euro.
In generale, si dimostra facilmente, per induzione aritmetica, che la somma dei primi n numeri interi positivi, ossia $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, è uguale a $n \cdot (n + 1)/2$; dunque, essendo nel nostro caso $n = 27$, le parti da distribuire sono 378.
D'altronde, si dimostra pure che la somma dei primi k numeri dispari, ossia $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k – 1)$, è uguale a k^2 (questo era già noto ai primi pitagorici…); pertanto, nel nostro caso, $2k – 1 = 2 \cdot 378 – 1 = 755$ e $k^2 = 378^2 = 142.884$, pari alla somma stanziata (in euro), e 150000 – 142884 = **7116.**
Può tornar utile sapere come furono assegnati questi 142.884 euro; per far questo scriviamo un programma, prendendo le parti da distribuire dalla più alta (assegnata al primo dipendente) via via alle più basse:

```
n = 27             # numero dei dipendenti
k = (n*(n+1))//2  # parti da distribuire
somma = k**2
print 'somma = ', somma
u = 2*k - 1 # ultima parte, che spetta al 1° dipendente
print 'al dip.  1  euro ', u
somma = somma - u
for dip in range(2, n+1):
    s = 0
    for i in range(dip):
        u = u - 2
        s = s + u
    print 'al dip. ', dip, ' euro ', s
    somma = somma - s
print 'avanzano euro ', somma  # controllo che sia 0
```

la cui esecuzione produce il seguente output:

```
somma =  142884
al dip.  1  euro  755
al dip.  2  euro  1504
al dip.  3  euro  2241
al dip.  4  euro  2960
al dip.  5  euro  3655
al dip.  6  euro  4320
al dip.  7  euro  4949
```

al dip. 8 euro 5536
al dip. 9 euro 6075
al dip. 10 euro 6560
al dip. 11 euro 6985
al dip. 12 euro 7344
al dip. 13 euro 7631
al dip. 14 euro 7840
al dip. 15 euro 7965
al dip. 16 euro 8000
al dip. 17 euro 7939
al dip. 18 euro 7776
al dip. 19 euro 7505
al dip. 20 euro 7120
al dip. 21 euro 6615
al dip. 22 euro 5984
al dip. 23 euro 5221
al dip. 24 euro 4320
al dip. 25 euro 3275
al dip. 26 euro 2080
al dip. 27 euro 729
avanzano euro 0

Per inciso, si vede che, alla fine dei conti, al 16-esimo dipendente è assegnata la quota più alta (8000 euro esatti), all'ultimo quella più bassa (729 euro).

ii. Per rispondere alla seconda domanda, basterebbe "invertire" questo programma, scambiando input e output, ovvero prendendo come dato di input somma (la somma di denaro stanziata) e come risultato in output n (il numero dei dipendenti) e svolgendo gli opportuni calcoli. Tuttavia, se interessa conoscere soltanto il numero dei dipendenti e non le singole quote da assegnare a ciascuno di essi, è sufficiente calcolare la radice quadrata di somma per avere $k = 1035 = n \cdot (n + 1)/2$, da cui si ricava l'equazione di secondo grado $n^2 + n - 2070 = 0$, **la cui soluzione positiva è $n = 45$.**

D1. – Se si toglie la prima cifra…

Risposta: 7125. Sia x la cifra più a sinistra e sia y il numero ottenuto eliminando questa cifra. Allora $10^n\ x + y = 57y$ da cui $10^n\ x = 56y$. Il secondo membro è multiplo di 7, dunque anche il primo membro deve esserlo. Ma 10^n non è divisibile per 7. Siccome $x < 10$, si deduce che $x = 7$. Allora $10^n = 8y$, da cui $y = 10^n\ /\ 8 = 125 \cdot 10^{n-3}$, con $n = 3, 4, 5, \dots$. Vi è un'infinità di soluzioni, tutte della forma $7125 \cdot 10^{n-3}$, con $n > 2$. Il più piccolo intero richiesto è allora 7125. Si trovano le altre soluzioni aggiungendo degli zeri a destra di 7125.

D2. – Un numero un po' particolare

Risposta: 2178. Se $4 \cdot abcd = dcba$, allora deve essere $a < 3$ poiché $4 \cdot 3000 = 12000$, numero con 5 cifre. Ma $dcba$ è pari, e allora $a = 2$. Da $2bcd \cdot 4 = dcb2$ si deduce che $d > 7$ e visto che il prodotto $d \cdot 4$ termina con 2, si ottiene $d = 8$. Si ha dunque $2bc8 \cdot 4 = 8cb2$, cioè $8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2$, da cui $390b + 30 = 60c$ e infine $13b + 1 = 2c$. Il secondo membro $2c$ è pari e < 19. Dunque, b è dispari e minore di 2, da cui $b = 1$ e $c = 7$.

D3. – La sesta potenza

Risposta: 27. Poiché $21^6 = 85.766.121 < 100.000.000$ e $32^6 = 1.073.741.824 > 999.999.999$, il numero iniziale N è tale che $21 < N < 32$.
La sesta potenza di N è divisibile per 3, e 3 è primo, sicché anche N deve essere divisibile per 3. Allora $N = 24$ oppure 27 oppure 30, ma **soltanto 27 dà il risultato mostrato.**

D4. – I Cavalieri della Tavola Rotonda

Risposta: 506. Generalizzando, si può provare che, quando le persone inizialmente sedute intorno al tavolo sono n, il numero di coloro che rimangono è dato da $(r(n) + 1)\ /\ 2$, dove / è la divisione intera e $r(n) = n$ se n è dispari, $r(n/2)$ altrimenti. Si può scrivere una funzione ricorsiva in Python e poi applicarla al numero desiderato:

```
def r(n):
    if n%2 != 0:
        return n
    return r(n//2)

print (r(2022)+1)//2
```

Provate, ad esempio, a far stampare i valori di $r(n)$ per n da 1 a 100…
È interessante osservare che la successione $r(n)$ per $n \geq 1$ è *autosimile*, poiché riproduce sé stessa quando si elimina da essa la prima occorrenza di ciascun numero (ossia, quando si toglie il primo 1, il primo 2, e così via) o, equivalentemente, quando si eliminano le occorrenze di posizione dispari. Notate che la stessa successione si ottiene anche quando si eliminano le prime k occorrenze di ciascun numero, con k fissato arbitrariamente.

Se si generalizza anche rispetto al numero di persone da contare per stabilire la successiva che si allontana dalla tavola (che, nel nostro caso, è 2, poiché ogni due persone una si alza e se ne va), il problema è detto *"di Giuseppe Flavio"*, che fu uno storico ebreo, vissuto nel primo secolo.

D5. – Quadrati palindromi

Risposta: 181. Infatti $181^2 = 32.761$ e la somma dei quadrati vale 1.992.991, che è un altro numero palindromo!
La formula, funzione di n, che fornisce la somma dei quadrati dei primi n numeri interi positivi è

$$n\,(n + 1)\,(2n + 1)\ /\ 6,$$

e questo si può facilmente dimostrare per induzione aritmetica. Occorrerà quindi calcolare il valore di tale espressione per $n = 11, 22, 33, \ldots, 161, 171, 181$.

D6. – Le radici reali di un'equazione…

Risposta: 10. Risulta facile vedere che ogni equazione reciproca di prima specie e di grado dispari ha una radice uguale a –1. Dunque, il primo membro è divisibile per $x + 1$. Abbiamo così:

$$(x + 1)\,(4x^{10} - 21x^8 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4) = 0.$$

Il primo fattore vale zero per $x = -1$. Il secondo fattore è ancora un polinomio reciproco di prima specie, in cui compaiono soltanto potenze pari di x, e notando che $4 - 21 + 17 = 0$ si deduce immediatamente che si annulla sia per $x = 1$ sia per $x = -1$. L'equazione di partenza diventa:

$$(x + 1)^2\,(x - 1)\,(4x^8 - 17x^6 + 17x^2 - 4) = 0.$$

Lo stesso ragionamento porta a concludere che anche il polinomio di grado 8 scritto tra parentesi si annulla sia per $x = 1$ sia per $x = -1$, sicché si ottiene l'equazione:

$$(x + 1)^3\,(x - 1)^2\,(4x^6 - 13x^4 - 13x^2 + 4) = 0.$$

Giunti a questo punto, l'equazione che si ottiene uguagliando a 0 il polinomio di grado 6 scritto tra parentesi può essere automaticamente risolta dalla calcolatrice!
Le radici reali dell'equazione di partenza sono nove: –1 (con molteplicità 3), 1 (con molteplicità 2), 1/2, –1/2, 2 e –2. **Sommandone i valori assoluti, si ottiene: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1/2 + 1/2 + 2 + 2 = 10.**

D7. – Le soluzioni intere

Risposta: (9, 11), ovvero 911. Possiamo osservare che x e y non differiscono di molto. Infatti:
$y^3 - (x + 1)^3 = 5x^2 - 9x + 7 > 0$ e $(x + 3)^3 - y^3 = x^2 + 33x + 19 > 0$. In altre parole:

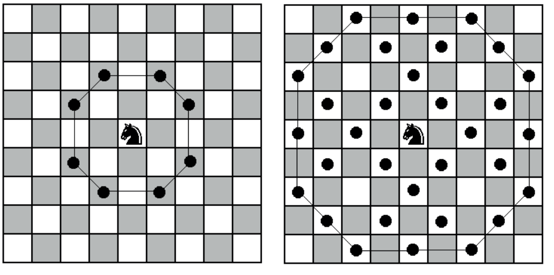
$x + 1 < y < x + 3$. Visto che x e y sono interi, si dovrà avere $y = x + 2$. Sostituendo y con $x + 2$, si trova $2x\,(x - 9) = 0$, le cui due soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 9$. **Le coppie possibili sono allora (0, 2) e (9, 11).**

D8. – A salto di cavallo

Risposta: 6421. Sia $f\,(n)$ il numero di case (distinte) raggiungibili dal cavallo in esattamente n mosse. Supponiamo che il cavallo parta da una casa bianca; se parte invece da una casa nera, basta scambiare i due colori nel seguito del discorso. Banalmente, $f\,(0) = 1$ (la casa di partenza) e $f\,(1) = 8$ (le 8 case nere raggiungibili con una mossa); proseguendo, $f\,(2) = 33$ (le 37 case bianche che stanno nell'ottagono di lato 3 case bianche, centrato nella casa di partenza, essa compresa, eccettuate però le 4 case bianche che distano due case in diagonale da quella di partenza) e $f\,(3) = 76$ (tutte le case nere che stanno nell'ottagono di lato 4 case nere, centrato nella casa di partenza). Per ricorrenza, si può provare che, quando $n \geq 3$, le case raggiungibili sono tutte quelle di colore nero (se n è dispari) o bianco (se n è pari) comprese nell'ottagono che ha $n + 1$ case dello stesso colore su ciascun lato. Per calcolare il numero di queste case, consideriamo il quadrato di lato $4n + 1$ centrato nella casa di partenza, dal quale bisogna tagliare via quattro porzioni (di ugual dimensione) agli angoli.
Nel caso n (≥ 3) dispari, le case nere comprese nel quadrato sono una in meno di quelle bianche, ossia $(4n + 1)^2/2$ approssimato per difetto, vale a dire $8n^2 + 4n$, mentre il numero di case nere da tagliare via in ciascuno dei quattro angoli è dato dalla somma dei numeri pari da 2 a $n - 1$ compresi, che è $(n^2 - 1)/4$. Pertanto, l'ottagono contiene $8n^2 + 4n - 4 \cdot (n^2 - 1)/4 = 7n^2 + 4n + 1$ case nere.
Nel caso n (≥ 3) pari, le case bianche comprese nel quadrato sono sempre una in più di quelle nere, ossia $(4n + 1)^2/2$ approssimato per eccesso, vale a dire $8n^2 + 4n + 1$, mentre il numero di case bianche da tagliare via in ciascuno dei quattro angoli è dato dalla somma dei numeri dispari da 1 a $n - 1$ compresi, che è $n^2/4$. Pertanto, l'ottagono contiene $8n^2 + 4n + 1 - 4 \cdot (n^2/4) = 7n^2 + 4n + 1$ case bianche: la stessa espressione ottenuta nel caso precedente!
In conclusione, per ogni $n \geq 3$, si ha $f\,(n) = 7n^2 + 4n + 1$, e dunque

$$f\,(30) = 6300 + 120 + 1 = 6421.$$

Osserviamo infine che i soli casi in cui $f\,(n)$ non è dato da $7n^2 + 4n + 1$ si hanno per $n = 1$ o 2 (si veda la figura sotto): quando $n = 1$ bisogna infatti escludere dall'ottagono (di colore opposto alla casa di partenza) le quattro case adiacenti ortogonalmente al cavallo ($7 + 4 + 1 - 4 = 8$); quando $n = 2$, come abbiamo detto, si devono invece escludere dall'ottagono (di stesso colore della casa di partenza) le quattro case che distano due case in diagonale dal cavallo ($28 + 8 + 1 - 4 = 33$).



D9. – Il numero della strega

Risposta: 3607. Sia M il numero della strega, e siano S e P i numeri scelti da Sergio e da Pietro, rispettivamente. Allora possiamo scrivere l'equazione

$$P^2\, M\,(M + S^2) = 123456789.$$

M ha 4 cifre, sicché $10^3 \leq M < 10^5$. Se $P \geq 12$, allora $M^2 < 10^6$, da cui una contraddizione; pertanto deve essere $P \leq 11$. Controllando i divisori primi fino a 11, si deduce che $P = 3$ oppure $P = 1$.

Nel caso in cui $P = 3$, otteniamo l'equazione di secondo grado in M:

$$M^2 + S^2M - 13717421 = 0,$$

dove M è dispari e S è pari. Il discriminante diviso per 4 è $S^4/4 + 13717421$, e deve essere un quadrato perfetto. Notiamo che:

$3703^2 = 13712209 < 13717421$;

$3704^2 = 13719616 = 2195 + 13717421$, ma $4 \cdot 2195 = 8780$ non è una quarta potenza;

$3705^2 = 13727025 = 9604 + 13717421$, e $4 \cdot 9604 = 14^4$.

Dunque una soluzione è $S = 14$, $M = 3607$. L'equazione può essere riscritta come

$$M \cdot (M + S^2) = 3607 \cdot 3803.$$

Siccome questi due numeri sono primi e poiché $M < M + S^2$, non ci sono altre soluzioni quando $P = 3$.

Nel caso in cui $P = 1$, otteniamo l'equazione $M \cdot (M + S^2) = 3^2 \cdot 3607 \cdot 3803$. I casi da analizzare sono $M = 1, 3, 9, 3607, 3803$ o $3 \cdot 3607$. Ma nessuno di questi va bene, perché S^2 dovrebbe terminare con 8, 60, 2, 20, 60 o 8, rispettivamente.

In conclusione, **la sola risposta possibile è $S = 14$, $P = 3$ e $M = 3607$.**

D10. – I venti depositi bancari

Risposta: 298 = 154 + 144. Un modo di risolvere il problema consiste nel calcolo delle entità dei venti depositi: x, y, $(x + y)$, $(x + 2y)$, $(2x + 3y)$, $(3x + 5y)$, $(5x + 8y)$, $(8x + 13y)$, $(13x + 21y)$, $(21x + 34y)$, $(34x + 55y)$, $(55x + 89y)$, $(89x + 144y)$, $(144x + 233y)$, $(233x + 377y)$, $(377x + 610y)$, $(610x + 987y)$, $(987x + 1597y)$, $(1597x + 2584y)$, $(2584x + 4181y)$. Si noti la presenza dei ***numeri di Fibonacci*** in queste espressioni. Occorre quindi risolvere l'equazione diofantea $2584x + 4181y = 10^6$, che ha un'infinità di soluzioni intere… Ma si può procedere in maniera forse più semplice, ricordando che, in una successione di numeri che abbia la stessa relazione di ricorrenza di quella di Fibonacci, il rapporto tra il termine $(n + 1)$-esimo e il termine n-esimo tende (oscillando) al numero aureo $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ al crescere di n. Sia v il diciannovesimo deposito. Ci aspettiamo allora che $1.000.000 / v$ sia "vicino" al numero aureo, ossia v "*prossimo*" a 618.033, 9887… (che, si noti, è uguale a $1.000.000 \cdot (1 - \phi)$). Visto che v deve essere un intero, poniamo $v = 618.034$, iniziando così il nostro calcolo con un'approssimazione che dovrebbe rivelarsi valida – poi controlleremo!

A questo punto, è sufficiente procedere "a ritroso", calcolando 1.000.000 –

618.034 = 381.966 (il diciottesimo deposito) e così via. Possiamo scrivere un breve programma in Python:

```
w = 1000000
v = 618034
for i in range(18):
        u = w - v
        w = v
        v = u
        print u
```

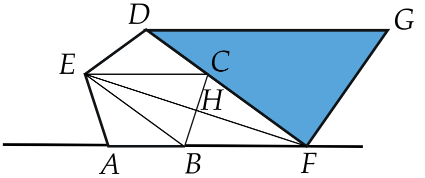
che stampa la sequenza

381966
236068
145898
90170
55728
34442
21286
13156
8130
5026
3104
1922
1182
740
442
298
144
154

Osserviamo che, nel nostro caso, il primo deposito risulta maggiore del secondo. Si può provare, inoltre, che 618034 è l'unico valore iniziale per v che produca una sequenza di numeri tutti positivi. E l'equazione diofantea precedentemente scritta è soddisfatta: $2584 \cdot 154 + 4181 \cdot 144 = 10^6$.

Il primo versamento era dunque di 154 dollari, il secondo di 144 dollari e il terzo (somma dei primi due) di 298 dollari.

D11. – Il Sangaku



Risposta: 3236. Il quadrilatero *ECFB* è un rombo: i triangoli *ECB* e *FCB* sono isometrici. Chiamiamo a il lato del pentagono regolare e ϕ la sezione aurea, che è il rapporto tra la diagonale e il

lato del pentagono regolare; abbiamo dunque:
$a = 1000$, $\phi = (1 + \sqrt{5}) \;/\; 2$ (che è circa 1,618) e $CF = CE = \phi\, a$.
Nel triangolo *DFG*, rettangolo in *F*, l'angolo in *D* misura 36° (la metà dell'angolo interno del pentagono) e, ricordando che $\cos 36° = \phi \;/\; 2$, si ha $DG \cdot \cos 36° = a + CF$, da cui

$$DG = 2\,(a + \phi\, a)/\;\phi = 2\,a\,(1 + \phi\,)\;/\;\phi = 2\,a\,\phi$$

e **infine $DG = 2 \cdot 1000 \cdot 1{,}618 = 3236$.**

D12. – Numerazione basca

Risposta: 160.

bi × bi = lau	**2 × 2 = 4**
bi × bost = hamar	**2 × 5 = 10**
bi × hamar = hogei	**2 × 10 = 20**
hiru × bost = hamabost	**3 × 5 = 15**
hiru × hamar = hogeita hamar	**3 × 10 = 30**
bost × bost = hogeita bost	**5 × 5 = 25**
bost × zazpi = hogeita hamabost	**5 × 7 = 35**
zazpi × bederatzi = hirurogeita hiru	**7 × 9 = 63**
zazpi × hamar = hirurogeita hamar	**7 × 10 = 70**
bederatzi × hamar = laurogeita hamar	**9 × 10 = 90**

I seguenti numeri baschi sono identificati direttamente:

2 bi	***3 hiru***	***4 lau***	***5 bost***
7 zazpi	***9 bederatzi***	***10 hamar***	***20 hogei***

Numeri da 11 a 19: *hama-X* significa $10 + X$ (dove X è minore di 10)
Numeri oltre 20: *X-r-ogeita Y* significa $X \times 20 + Y$ (dove Y non è maggiore di 20)

Nei composti, 10 è *hama* (non *hamar*) e 20 è *hogeita* (non *hogei*).
La lettera "*h*" all'inizio della seconda parola in un composto cade (ad esempio, *lau-r-hogeita* diventa *laurogeita*).

D13. - Un calcolo combinatorio

Risposta: 5432. Le permutazioni delle 32 case bianche sono 32! (il fattoriale di 32) e, in ognuna di esse, ciascuna casa può essere orientata in 8 modi: si hanno dunque $32! \cdot 8^{32}$ disposizioni delle case bianche. Altrettante sono quelle delle case nere, per cui si ottiene $(32! \cdot 8^{32})^2$. Considerando infine gli 8 orientamenti dell'intera scacchiera riassemblata, questo numero va diviso per 8, sicché il risultato è $(32! \cdot 8^{32})^2/8$ =

543266186194242967642784232235633503735612607303962247632709505744685
15358352433023815233306353231534958425879347200000000000000,

che ha ben 128 cifre decimali (quando il numero di atomi in tutto l'universo conosciuto sembra che ne abbia "soltanto" un'ottantina). Data in input la linea

```
import math;  ((math.factorial(32)*(8**32))**2)/8
```

l'interprete Python ha fornito questo risultato esatto, che tuttavia può essere approssimato con una normale calcolatrice; in effetti, è sufficiente mantenere le 5 cifre decimali più significative di ciascuno dei valori intermedi calcolati: $32! \cong 2{,}6313 \cdot 10^{35}$; $8^{32} \cong 7{,}9228 \cdot 10^{28}$, e dunque $(32! \cdot 8^{32})^2/8 \cong 5{,}4326 \cdot 10^{127}$.

Finito di stampare
presso
Arti Grafiche Bianca & Volta
via del santuario 2
Truccazzano (MI)
nel mese di aprile 2022

ISBN: 978-88-89249-71-0

La calcolatrice grafica come strumento didattico

Il supporto CASIO

WWW.CASIO-EDU.IT

Luogo virtuale dove trovare:

- i prossimi eventi di formazione
- i materiali didattici
- le esperienze raccolte dalle classi

INCONTRI DI FORMAZIONE

Eventi gratuiti online
e/o presso la scuola
di varie tipologie diverse

CALCOLATRICE GRAFICA FX-CG50

HELPLINE

casio-edu@casio.it

NESWLETTER

Aggiornamenti costanti
sulle numerose iniziative
didattiche gratuite

RISORSE DIDATTICHE

- Più di 400 tra attività didattiche, problemi di realtà e risoluzioni delle passate prove d'esame
- Più di 70 video-tutorial delle principali funzioni
- Più di 50 esperienze raccolte dalle classi

"IL MONDO DÀ I NUMERI" PROGETTO DIDATTICO NATO DAL PROTOCOLLO CON IL MINISTERO DELL'ISTRUZIONE