Questo libro ti propone due tipi d'attività :

- **55 esercizi di calcolo di aree** (eleganti, interessanti e didatticamente organizzati),
- **33 quesiti a risposta chiusa** (tratti dal gioco-concorso Kangourou).

Le proprietà ed i teoremi che vengono utilizzati sono contrassegnati da questo "simbolo".

Certi esercizi sono, in tutto o in parte, svolti.

Dati due punti A e B nel piano, la retta da essi individuata verrà indicata con (AB), mentre il segmento che li ha come estremi e che li include verrà indicato con [AB].

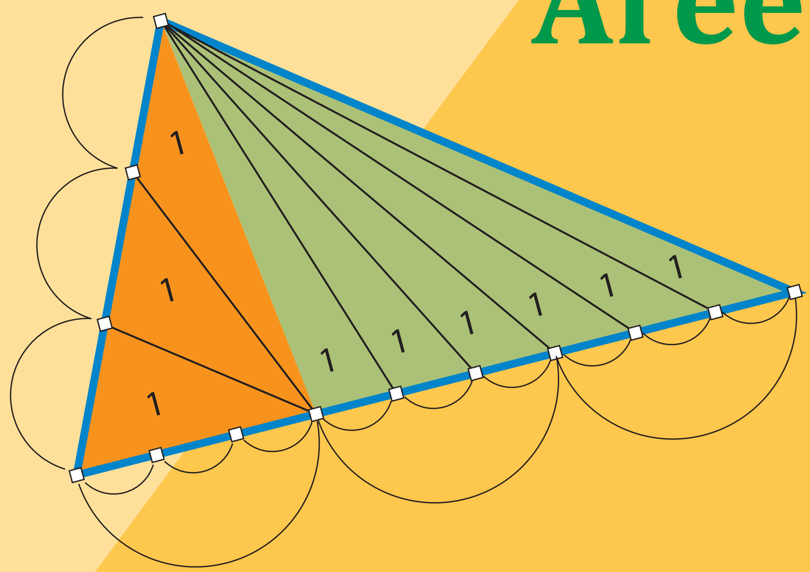
Invent'Aree

Disegni e impaginazione di J. P. Deledicq.

Via G. Medici 2, 20900 Monza (MB)
Traduzione di Angelo Lissoni
ISBN: 978-88-89249-31-4
Stampato in Italia da Arti Grafiche Bianca & Volta - Truccazzano (MI)

Jean-Michel Slowik
& l'equipe di Kangourou Francia

Invent' Aree!

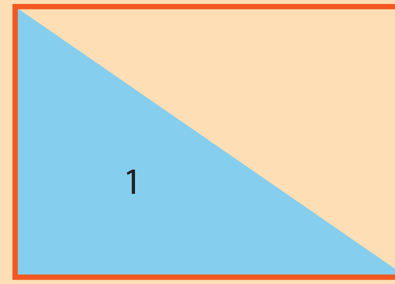


Kangourou Italia

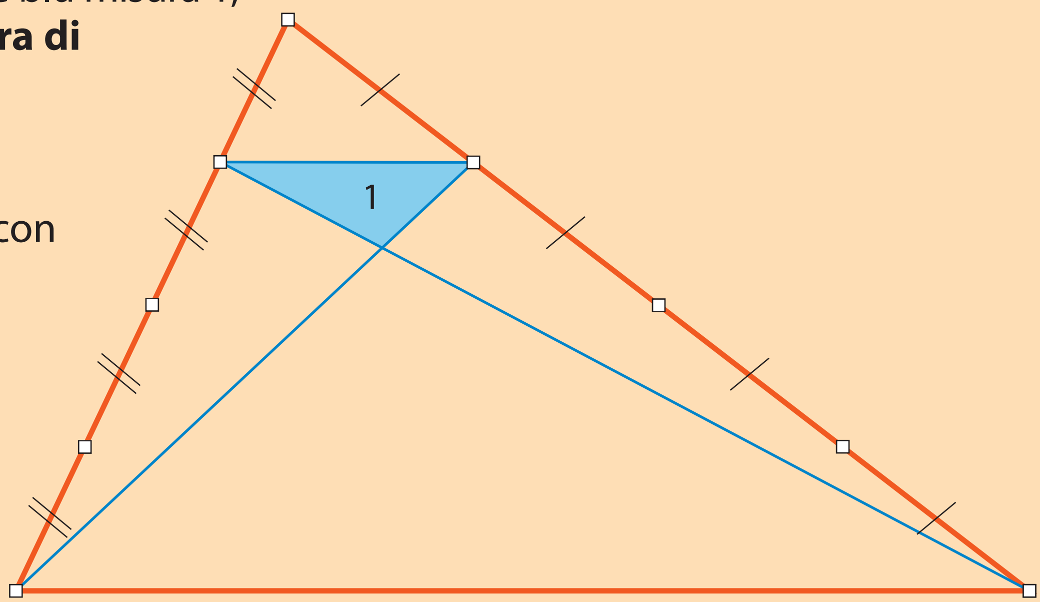
Sommario

1• LA SUDDIVISIONE CON LA MEDIANA

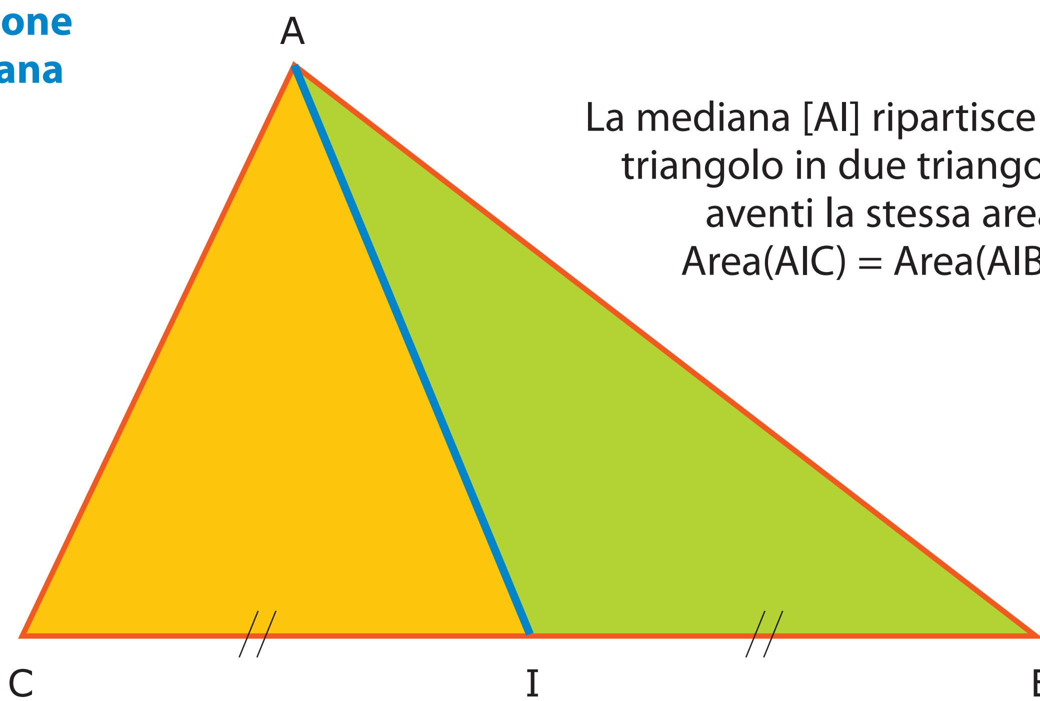
Dove vogliamo arrivare?
Se la superficie blu misura 1, saprai trovare la superficie del rettangolo con i lati rossi.



Se la superficie blu misura 1, **dopo la lettura di questo libro**, saprai trovare la superficie del triangolo con i lati rossi!

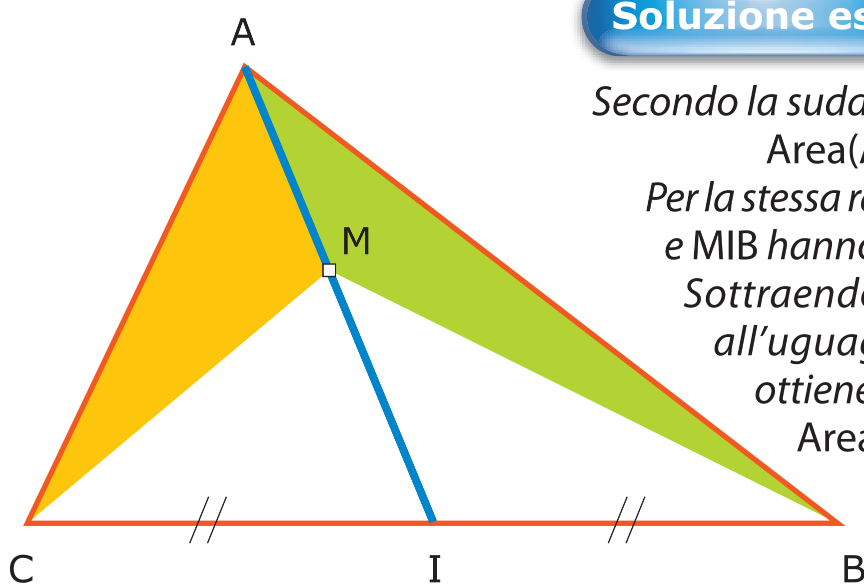


La suddivisione con la mediana



La mediana [AI] ripartisce il triangolo in due triangoli aventi la stessa area.
Area(AIC) = Area(AIB).

1 Siano ABC un triangolo e M un punto della mediana (AI). Mostriamo che i due triangoli AMC e AMB hanno la stessa area.



Soluzione es. 1

Secondo la suddivisione con la mediana,

Area(AIC) = Area(AIB).

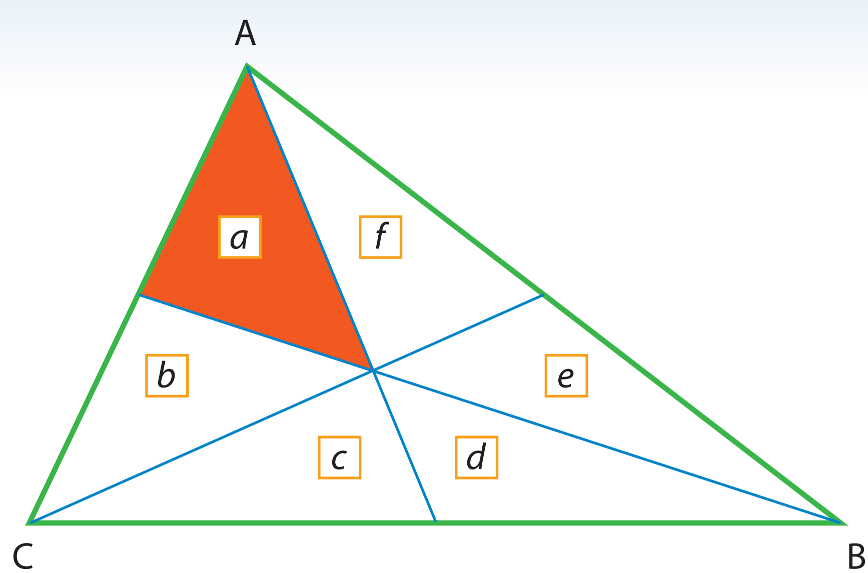
Per la stessa ragione, i due triangoli MIC e MIB hanno la stessa area.

Sottraendo questa stessa area all'uguaglianza precedente, si ottiene

Area(AMC) = Area(AMB).

(Abbiamo qui utilizzato l'**additività** e dunque la **sottrattività** dell'area.)

2 Si sono tracciate le 3 mediane del triangolo ABC. Se l'area del triangolo ABC vale 1, quanto vale l'area del triangolo rosso?



Soluzione es. 2

Secondo la suddivisione con la mediana:

$\boxed{a} = \boxed{b}$

$\boxed{c} = \boxed{d}$

$\boxed{e} = \boxed{f}$

Ricordando l'esercizio 1

$\boxed{a} + \boxed{b} = \boxed{e} + \boxed{f}$

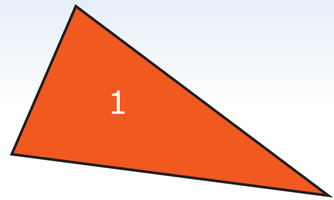
Dunque $2 \times \boxed{a} = 2 \times \boxed{f}$ *e* $\boxed{a} = \boxed{f}$.

Allo stesso modo, mostriamo che vale $\boxed{a} = \boxed{b} = \boxed{c} = \boxed{d} = \boxed{e} = \boxed{f}$.

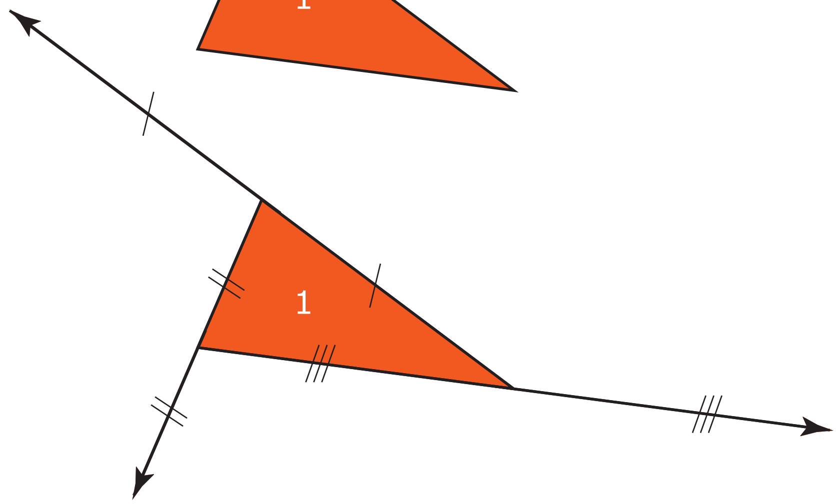
Ciascuna di queste aree vale dunque $\frac{1}{6}$.

3 L'ingrandimento del triangolo

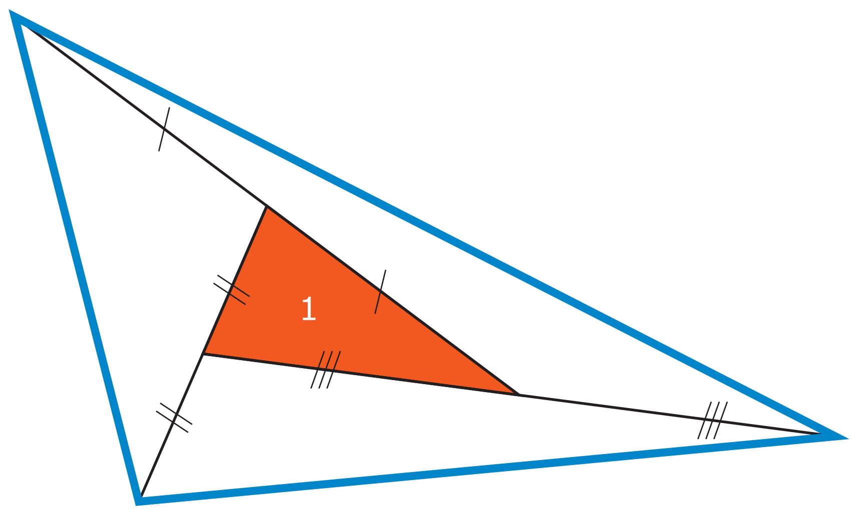
Prendiamo un triangolo di area 1.

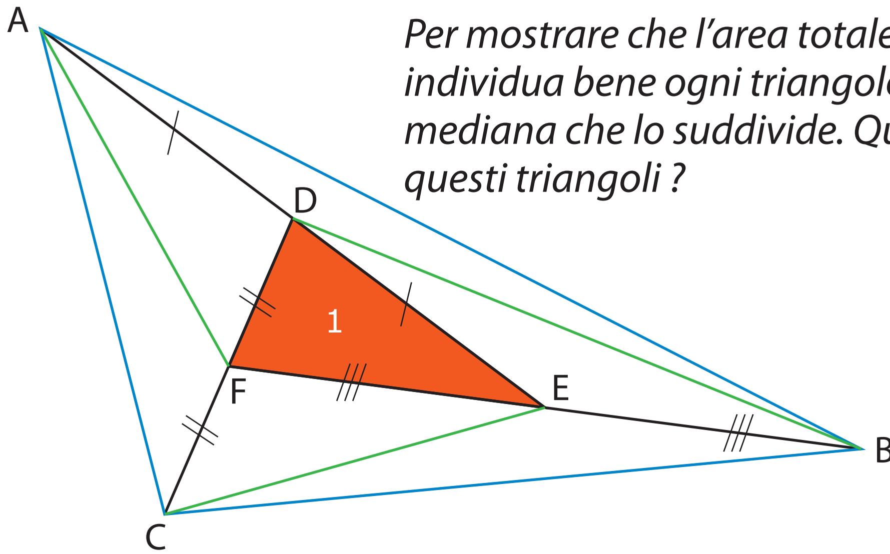


Ingrandiamolo prolungando ciascuno dei suoi lati fino a raddoppiarlo, come in figura.



Quanto misura l'area del triangolo di lati blu ?

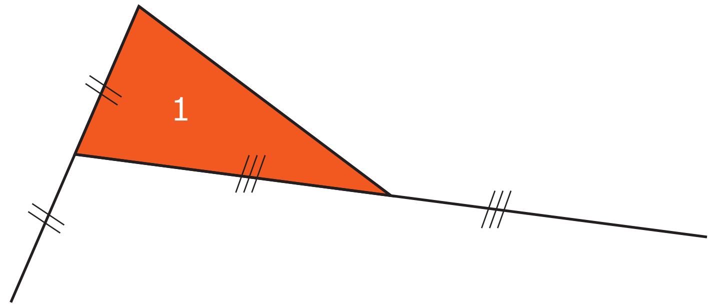




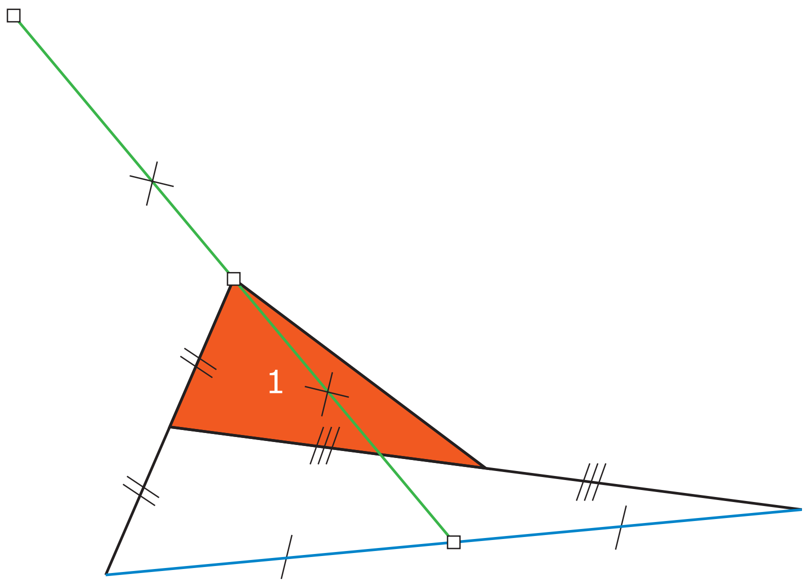
Per mostrare che l'area totale vale 7, individua bene ogni triangolo e la relativa mediana che lo suddivide. Quali sono questi triangoli ?

4 Riprendiamo il nostro triangolo ed ingrandiamolo come indicato di seguito :

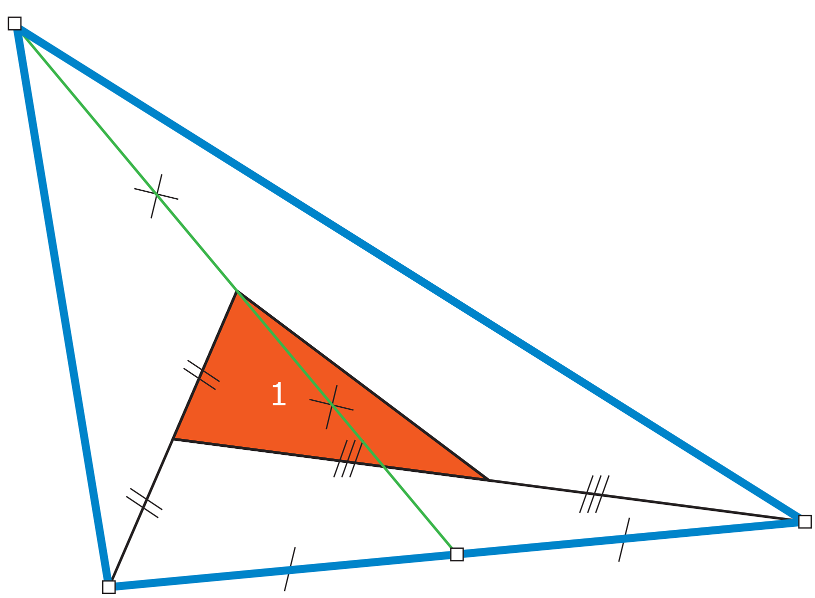
Passo 1



Passo 2



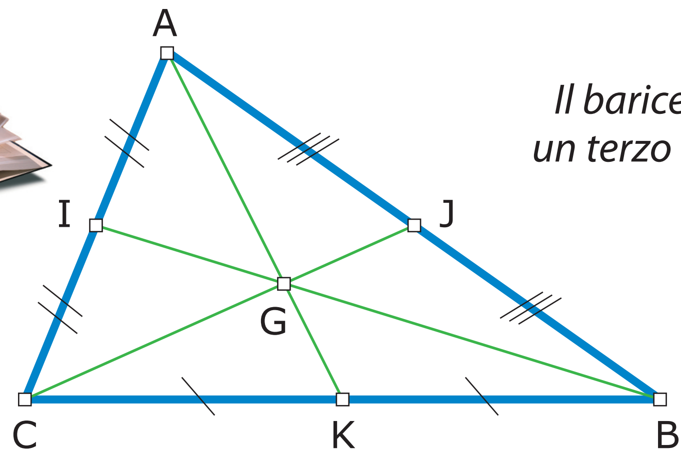
Passo 3



Quanto misura l'area del grande triangolo blu ?

Trovate le soluzioni di questi esercizi a pagina 45.

Il baricentro

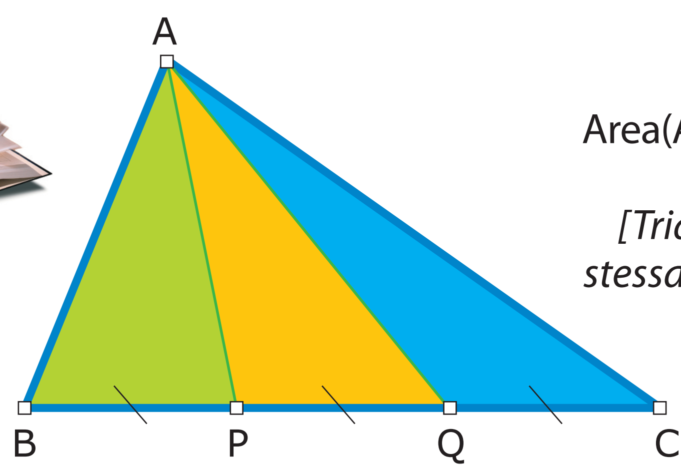


Ricorda :

Il baricentro di un triangolo si trova ad un terzo della lunghezza di ogni mediana (a partire dalla base) :

2 [GK] = [AG] ;
2 [GJ] = [CG] ;
2 [GI] = [BG].

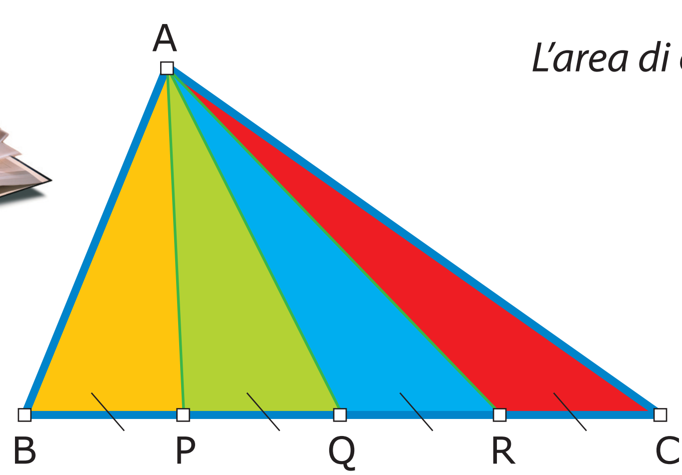
Il teorema del terzo



Se [BP] = [PQ] = [QC]
allora
Area(ABP) = Area(APQ) = Area(AQC).

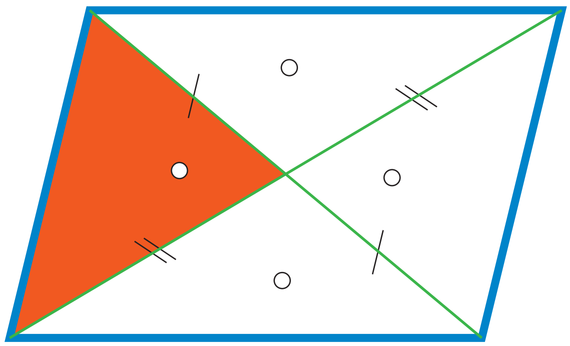
[Triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza hanno la stessa area !]

Il teorema del quarto



L'area di ogni triangolo colorato vale un quarto dell'area del triangolo.

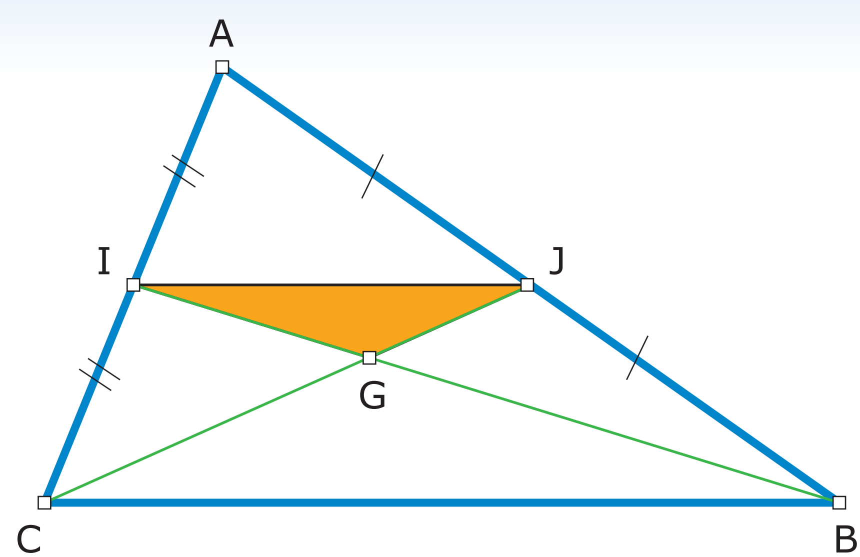
La suddivisione del parallelogramma



Le diagonali suddividono un parallelogramma in quattro triangoli aventi la stessa area.

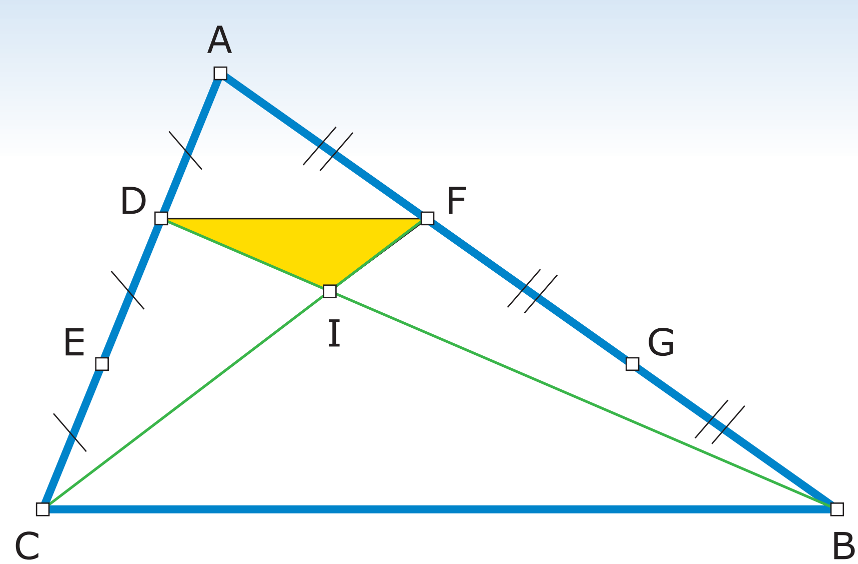
5 Calcolare l'area del triangolo arancione in funzione dell'area del triangolo ABC.

Cercare … e trovare una dimostrazione !
La soluzione commentata di questo (difficile) esercizio è presentata a pagina 8.



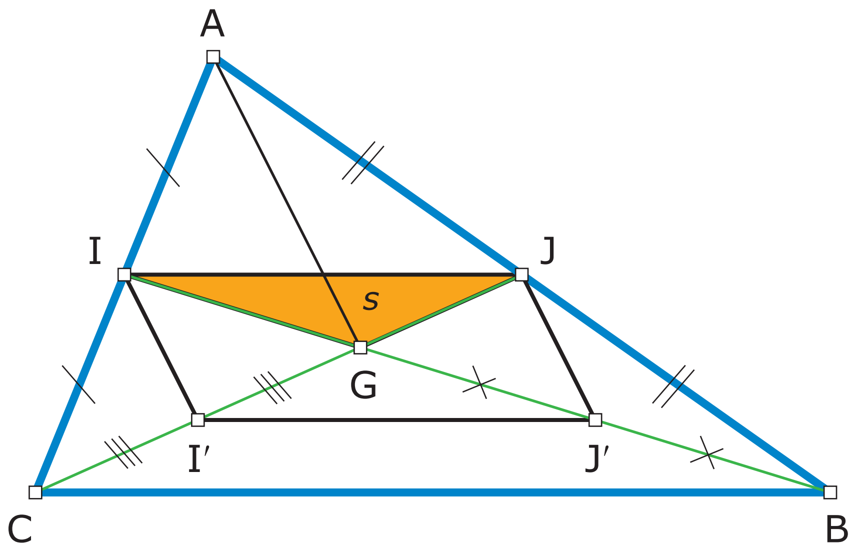
6 Calcolare l'area del triangolo giallo in funzione dell'area del triangolo ABC.

Cercare … e trovare una dimostrazione !
La soluzione commentata di questo (piuttosto difficile) esercizio è presentata a pagina 9.



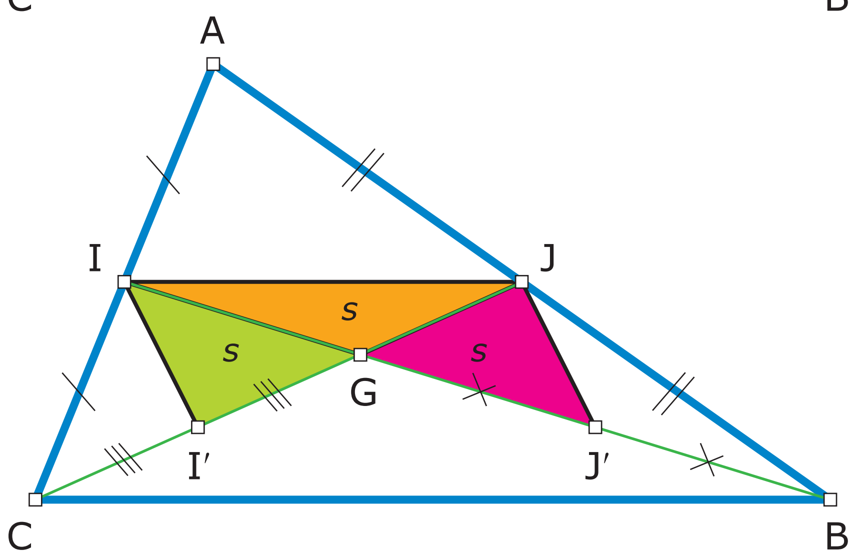
Soluzione es. 5

Ricorda : il baricentro G si trova a $\frac{1}{3}$ di [CJ] e a $\frac{1}{3}$ di [IB].



Le diagonali del parallelogramma II′J′J lo suddividono in quattro triangoli che hanno la stessa area.

Si ponga :
Area(IGJ) = Area(II′G)
= Area(GJJ′) = s.



Nel triangolo ICG, (II′) è un mediana, dunque lo divide in due triangoli che hanno la stessa area :

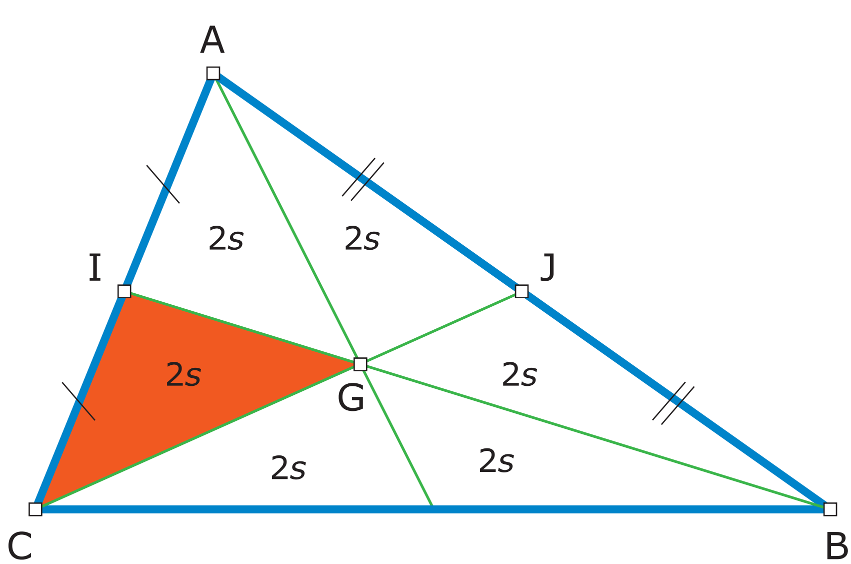
Area(II′C) = s

e

Area(ICG) = 2s.

D’altra parte, ricordando l’esercizio 2, le tre mediane di un triangolo lo dividono in 6 triangoli che hanno la stessa area. Dunque :
Area(ABC) = 6 × Area(ICG).

Area(ABC) = 12s.

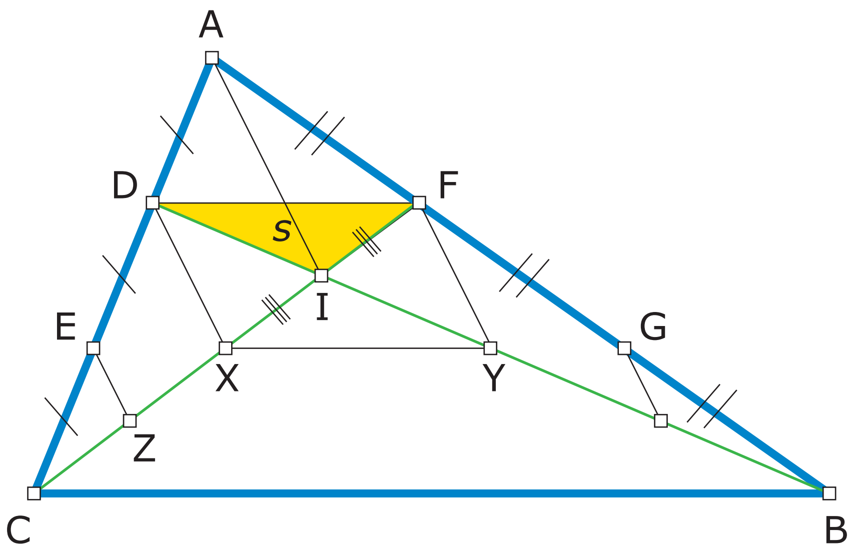


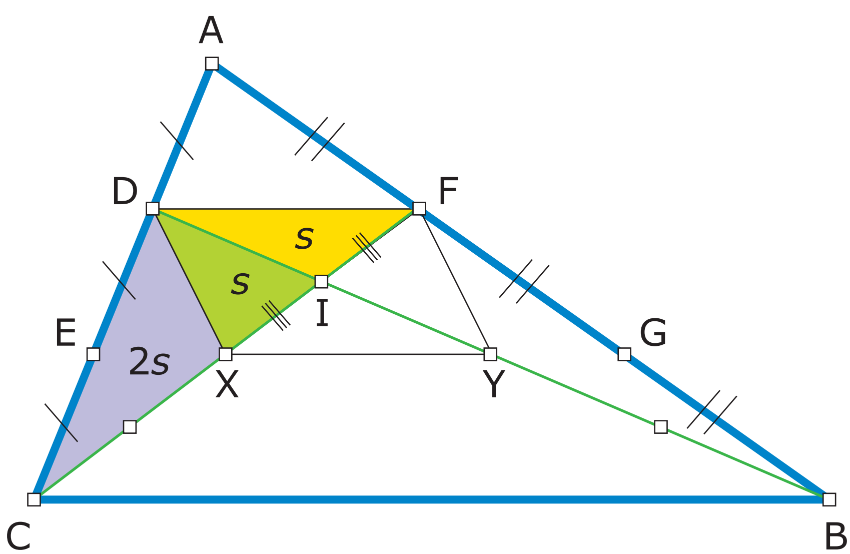
Infine :

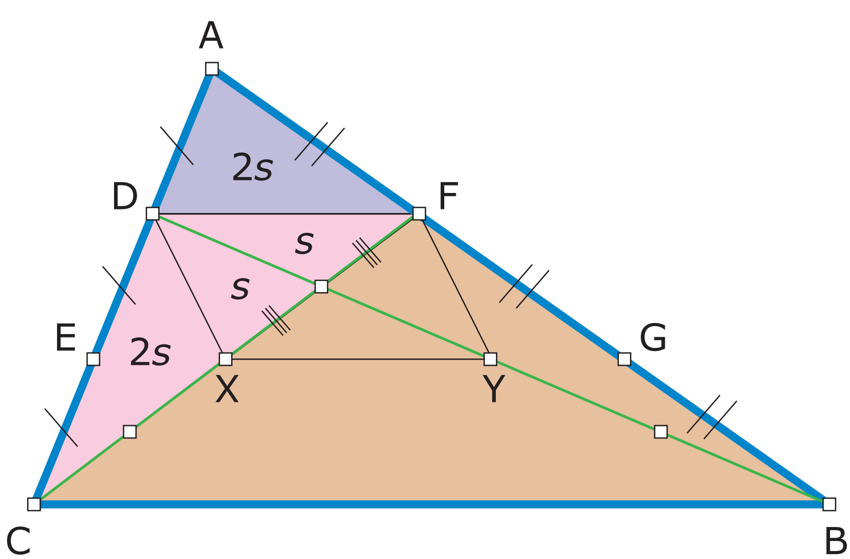
$$\textbf{Area(IJG)} = \frac{\textbf{Area(ABC)}}{\textbf{12}}.$$

Soluzione es. 6

Tracciamo la parallela ad (AI) passante per F e quella passante per D. Poniamo Area(DIF) = s.







Per il teorema di Talete :

$$\frac{DX}{AI} = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3} \; ;$$

$$\frac{FY}{AI} = \frac{BF}{BA} = \frac{2}{3} \, .$$

Si ha dunque

$$DX = FY = \frac{2}{3} AI$$

e DFYX è un parallelogramma.
Dunque : IF = IX.
Con le proiezioni di segmenti uguali ([IX] = [XZ] = [ZC]), si deduce che I si trova ad un quarto di [FC].

Poiché [DI] è una mediana di DFX,

$$Area\,(IDX) = s.$$

Poiché [DX] è una mediana di DFC,

$$Area\,(CDX) = 2s.$$

Dato che il ponto D si trova ad un terzo di [AC], per il teorema del terzo :

$$Area(FAD) = \frac{1}{2}\, Area(FDC)$$

$$= \frac{4s}{2} = 2s.$$

Dunque : Area(CFA) = 6s.

E, per il teorema del terzo nel triangolo CAB :

$$Area(CAF) = \frac{1}{3}\, Area(CAB).$$

Infine :

$$\mathbf{Area(ABC) = 18s.}$$