Kangourou della Matematica 2023
Coppa Kangourou a squadre
Finale 2
Cervia, 5 maggio 2023

Quesiti

1. Differenza di cubi
Le misure, in metri, dei lati di due cubi sono numeri interi. La differenza (positiva) dei loro volumi è 37 m^3. Di quanti metri quadrati è la differenza (positiva) delle loro superfici?

2. L'esame
Ad un esame all'università hanno preso parte 210 studenti. Il voto medio (in trentesimi) riportato dalle ragazze è 25, quello riportato dai ragazzi è 20; il voto medio calcolato su tutti partecipanti è 23. Quante ragazze hanno sostenuto l'esame?

3. La colla
Amedeo ha a disposizione un gran numero di blocchi a forma di parallelepipedo, ciascuno di dimensioni (in centimetri) $2 \times 1 \times 1$. Accosta – senza lasciare spazi vuoti – e incolla fra loro parte di tali blocchi in modo da ottenere un parallelepipedo rettangolo di dimensioni (in centimetri) $7 \times 6 \times 5$. Per incollare due superfici aderenti serve 1 grammo di colla per ogni cm^2. Ogni volta che due superfici sono aderenti, deve incollarle. Quanti grammi di colla usa per costruire il parallelepipedo?

4. Le miscele
Una miscela A è costituita da acqua per il 90%, una miscela B è costituita da acqua per il 54%. Si sono prelevati 160 litri dalla miscela B e si sono mescolati a n litri della miscela A ottenendo una nuova miscela nella quale la percentuale di acqua è il 78%. Quanto vale n?

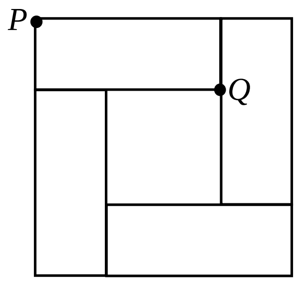
5. La somma di Anna
Anna ha scritto sei numeri interi positivi tutti diversi fra loro, li ha sommati e ha ottenuto 2.023. Il più grande dei numeri scritti da Anna è il più piccolo che, sotto il vincolo esposto, consente di ottenere tale somma. Che numero è?

6. Carta a quadretti
Su un enorme foglio quadrato di carta a quadretti, con 2.023 quadretti per lato, si vogliono tracciare delle rette, nessuna parallela a quelle che delimitano i quadretti, in modo che tutti i vertici dei quadretti che appaiono sul foglio vengano coperti da almeno una retta. Qual è il più piccolo numero di rette che è sufficiente tracciare?

7. Dieci cifre
Un numero intero di 10 cifre è il prodotto di cinque interi consecutivi ed è il più grande intero di 10 cifre che gode di questa proprietà. Qual è il più grande dei cinque interi consecutivi?

8. La partizione

Il quadrato in figura è ripartito in 4 rettangoli congruenti e un quadrato, tutti di area 300 cm^2. Quanti centimetri è lungo il segmento PQ?



9. La somma è un quadrato

Qual è il più piccolo numero intero positivo k tale che il numero $193 \times k + 9$ sia un quadrato perfetto?

10. Le intersezioni

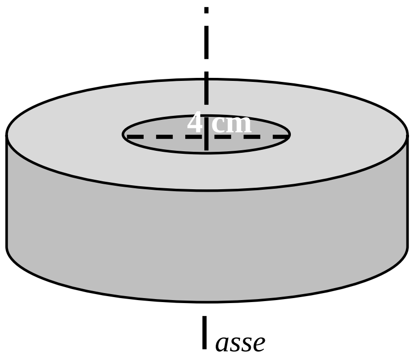
Angela ha questo compito: su un foglio di carta deve tracciare 3 triangoli rossi e 5 triangoli blu. Il numero N dei punti di intersezione fra lati di colori diversi deve essere finito. Qual è il massimo valore possibile di N?

11. La pista circolare

Paolo e Gino si allenano alla corsa lungo una pista circolare. Partono da punti diametralmente opposti, ma corrono in versi opposti, ciascuno alla propria velocità mantenuta costante. Quando si incontrano per la prima volta, Paolo ha percorso 100 metri dalla partenza; quando si incontrano per la seconda, Gino ha percorso 150 metri dal punto del primo incontro. Quanti metri è lunga la pista?

12. Le corone

Per fabbricare dei macchinari di precisione occorrono delle corone cilindriche di materiale molto costoso, tutte dello stesso spessore e omogenee, tutte con il cilindro interno del diametro di 4 cm, ma con il cilindro esterno di diametro variabile. Per le più grandi, il diametro esterno è 28 cm; le più piccole pesano la metà delle più grandi. Il costo delle corone è direttamente proporzionale alla misura del diametro esterno; quello di una delle più grandi è 2023 euro. Quanti euro costa una delle più piccole?

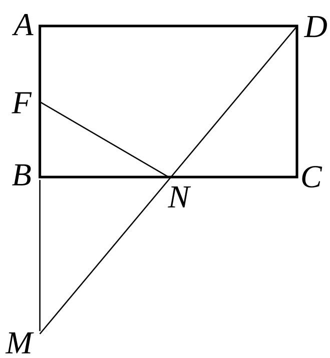


13. BANANA

In quanti modi diversi si può leggere la parola BANANA nella tabella in figura, tenendo presente che, per ogni cella “letta”, la successiva deve condividere con essa un lato e che una stessa cella può essere “letta” più volte?

B	A	N
A	N	A
N	A	N

14. L’area del rettangolo



In figura, $ABCD$ è un rettangolo, F è il punto medio del lato AB, N è il punto medio del lato BC e M è il punto comune alle rette che contengono una il lato AB, l’altra il segmento DN. L’area del triangolo FMN vale 99. Quanto vale l’area del rettangolo $ABCD$?

15. Cento numeri in linea

Di un allineamento di 100 numeri interi positivi, si sa che ognuno dei numeri diversi dal primo dell’allineamento e dall’ultimo è la media aritmetica dei due che gli sono adiacenti. Si sa inoltre che uno dei 100 numeri è 2.023 e che non ve ne sono di maggiori. Per il più piccolo dei numeri dell’allineamento vi sono diversi possibili valori: se M è il maggiore di questi possibili valori e m è il minore, quanto vale $M + m$?

Kangourou della Matematica 2023
Coppa Kangourou a squadre
Finale 2
Cervia, 5 maggio 2023

Quesiti e soluzioni

1. Differenza di cubi

Le misure, in metri, dei lati di due cubi sono numeri interi. La differenza (positiva) dei loro volumi è 37 m^3. Di quanti metri quadrati è la differenza (positiva) delle loro superfici?

Risposta: 0042. Sol. I cubi dei primi 5 interi consecutivi sono 1, 8, 27, 64, 125 ed è chiaro che i successivi originano differenze tutte superiori: allora è evidente che i nostri due cubi hanno lati di lunghezze 3 e 4, dunque superfici rispettivamente di aree, in metri quadrati, 54 e 96.

2. L'esame

Ad un esame all'università hanno preso parte 210 studenti. Il voto medio (in trentesimi) riportato dalle ragazze è 25, quello riportato dai ragazzi è 20; il voto medio calcolato su tutti partecipanti è 23. Quante ragazze hanno sostenuto l'esame?

Risposta: 0126. Sol. Il punteggio totale conseguito è 23×210 = 4830. Se tutti avessero avuto il voto medio dei ragazzi il punteggio totale sarebbe stato 20×210 = 4200; i 630 punti in più corrispondono al prodotto del numero delle ragazze per i 5 punti in più che mediamente ciascuna di esse ha conseguito e 630/5=126.

3. La colla

Amedeo ha a disposizione un gran numero di blocchi a forma di parallelepipedo, ciascuno di dimensioni (in centimetri) 2 × 1 × 1. Accosta – senza lasciare spazi vuoti – e incolla fra loro parte di tali blocchi in modo da ottenere un parallelepipedo rettangolo di dimensioni (in centimetri) 7 × 6 × 5. Per incollare due superfici aderenti serve 1 grammo di colla per ogni cm^2. Ogni volta che due superfici sono aderenti, deve incollarle. Quanti grammi di colla usa per costruire il parallelepipedo?

Risposta: 0418. Sol. Il volume del parallelepipedo è 210 cm^3, dunque i blocchi usati sono 105. L'area della superficie totale di ogni blocco è 10 cm^2, mentre l'area della superficie totale del parallelepipedo (l'unica superficie che non viene a contatto con la colla) è 214 cm^2. Sottraendo 214 dalla somma 1050 delle aree delle superfici laterali dei blocchi si ottiene 836, quantità che va ovviamente divisa per 2. Da notare che il risultato è indipendente dalla disposizione dei blocchi.

4. Le miscele

Una miscela *A* è costituita da acqua per il 90%, una miscela *B* è costituita da acqua per il 54%. Si sono prelevati 160 litri dalla miscela *B* e si sono mescolati a *n* litri della miscela *A* ottenendo una nuova miscela nella quale la percentuale di acqua è il 78%. Quanto vale *n*?

Risposta: 0320. Sol. La percentuale di acqua scende del 12% dalla miscela A alla nuova miscela e sale del 24% dalla miscela B alla nuova miscela. Quindi il contributo della miscela A deve essere doppio di quello della miscela B.

5. La somma di Anna

Anna ha scritto sei numeri interi positivi tutti diversi fra loro, li ha sommati e ha ottenuto 2.023. Il più grande dei numeri scritti da Anna è il più piccolo che, sotto il vincolo esposto, consente di ottenere tale somma. Che numero è?

Risposta: 0340. Sol. Dati sei numeri consecutivi, la somma delle differenze fra ognuno dal secondo in poi e il primo è 15. Si ha 2.023 – 15 = 2.008 = 334 × 6 + 4. Agli interi da 334 a 339 occorre allora aggiungere complessivamente 4: si può farlo ad esempio considerando 340 al posto di 336, oppure aggiungendo 1 a ciascuno degli ultimi quattro. È chiaro che non si può fare di meglio perché togliendo il vincolo che i sei numeri siano tutti diversi fra loro, la risposta sarebbe 338 (poiché 2.023 = 337 × 5 + 338) e con il massimo a 339 non si riuscirebbe a raggiungere la somma voluta.

6. Carta a quadretti

Su un enorme foglio quadrato di carta a quadretti, con 2.023 quadretti per lato, si vogliono tracciare delle rette, nessuna parallela a quelle che delimitano i quadretti, in modo che tutti i vertici dei quadretti che appaiono sul foglio vengano coperti da almeno una retta. Qual è il più piccolo numero di rette che è sufficiente tracciare?

Risposta: 4046. Sol. Si possono tracciare le due diagonali del quadrato e tutte le 4.044 rette parallele a una di esse che coprono tutti i vertici rimanenti dei quadretti. Un numero inferiore di rette non è sufficiente: basta osservare che i vertici dei quadretti che stanno sul bordo del quadrato grande sono 8.092 e che nessuna retta non parallela a qualche lato ne può coprire più di due.

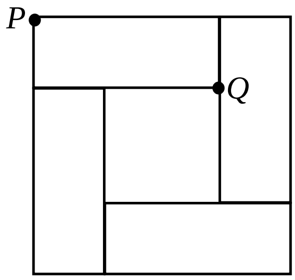
7. Dieci cifre

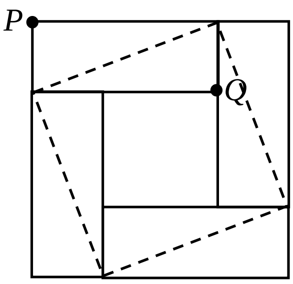
Un numero intero di 10 cifre è il prodotto di cinque interi consecutivi ed è il più grande intero di 10 cifre che gode di questa proprietà. Qual è il più grande dei cinque interi consecutivi?

Risposta: 0102. Sol. Chiaramente basta indagare fra gli interi positivi. Osserviamo che il più piccolo numero di 11 cifre è 10^{10} e che 100 è la sua radice quinta. Inoltre, per ogni n e $k > 0$ risulta $(n - k)(n + k) = n^2 - k^2 < n^2$: quindi scegliendo 100 come terzo dei cinque numeri consecutivi $(n - 2)$, $(n - 1)$, n, $(n + 1)$, $(n + 2)$, il loro prodotto è certamente minore di 10^{10}. D'altra parte un facile calcolo mostra che $n = 101$ (che porterebbe alla risposta 103) non è già più accettabile.

8. La partizione

Il quadrato in figura è ripartito in 4 rettangoli congruenti e un quadrato, tutti di area 300 cm^2. Quanti centimetri è lungo il segmento PQ?





Risposta: 0030. Sol. In ciascuno dei 4 rettangoli le diagonali sono congruenti, quindi PQ è congruente al lato del quadrato tratteggiato in figura che ha area 300 × 3 cm^2 e quindi lato 30 cm.

9. La somma è un quadrato

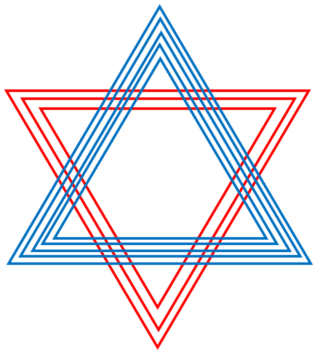
Qual è il più piccolo numero intero positivo k tale che il numero $193 \times k + 9$ sia un quadrato perfetto?

Risposta: 0187. Sol. Deve essere $193 \times k = (n - 3)(n + 3)$ per qualche intero positivo n. Poiché 193 è primo, per minimizzare k si deve avere $193 = n + 3$, dunque $k = n - 3 = 187$.

10. Le intersezioni

Angela ha questo compito: su un foglio di carta deve tracciare 3 triangoli rossi e 5 triangoli blu. Il numero N dei punti di intersezione fra lati di colori diversi deve essere finito. Qual è il massimo valore possibile di N?

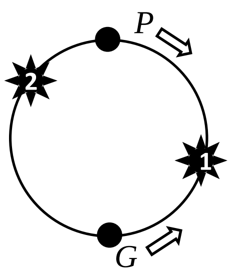
Risposta: 0090. Sol. Ogni lato di un triangolo può intersecare un diverso triangolo al massimo due volte: allora ogni lato di un triangolo rosso può avere al massimo 10 intersezioni con triangoli blu, dunque le intersezioni richieste non sono certamente più di 90. Possono effettivamente essere 90: basta per esempio disporre i triangoli come indicato in figura.



11. La pista circolare

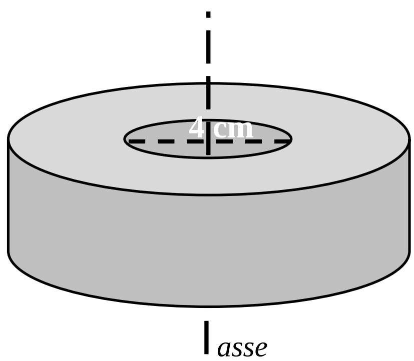
Paolo e Gino si allenano alla corsa lungo una pista circolare. Partono da punti diametralmente opposti, ma corrono in versi opposti, ciascuno alla propria velocità mantenuta costante. Quando si incontrano per la prima volta, Paolo ha percorso 100 metri dalla partenza; quando si incontrano per la seconda, Gino ha percorso 150 metri dal punto del primo incontro. Quanti metri è lunga la pista?

Risposta: 0350. Sol. Sia x la lunghezza della semicirconferenza: per arrivare al primo punto di incontro Paolo percorre 100 m e Gino $(x - 100)$ m. Per arrivare al secondo punto di incontro Gino percorre 150 m (e quindi arriva in un punto a 50 m oltre il punto di partenza di Paolo); Paolo invece percorre $(2x - 150)$ m. Dato che mantengono velocità costante, il rapporto tra i due percorsi di Paolo deve coincidere con quello tra i due percorsi di Gino, cioè $\frac{100}{2x-150} = \frac{x-100}{150}$, che porta $2x^2 = 350x$.



12. Le corone

Per fabbricare dei macchinari di precisione occorrono delle corone cilindriche di materiale molto costoso, tutte dello stesso spessore e omogenee, tutte con il cilindro interno del diametro di 4 cm, ma con il cilindro esterno di diametro variabile. Per le più grandi, il diametro esterno è 28 cm; le più piccole pesano la metà delle più grandi. Il costo delle corone è direttamente proporzionale alla misura del diametro esterno; quello di una delle più grandi è 2023 euro. Quanti euro costa una delle più piccole?



Risposta: 1445. Sol. Poiché lo spessore è lo stesso per tutte le corone, che sono omogenee, il peso è proporzionale alla superficie delle corone circolari che ne costituiscono le basi. Se r è il raggio esterno in cm di tali corone, la loro superficie è $\pi(r^2 - 2^2)$ cm^2: quella delle corone più grandi ($r = 14$) è dunque 192π cm^2, quella delle più piccole è 96π cm^2 che comporta un raggio esterno di 10 cm. Il costo di una delle più piccole è dunque $2.023 \times 10 / 14$ euro.

13. BANANA

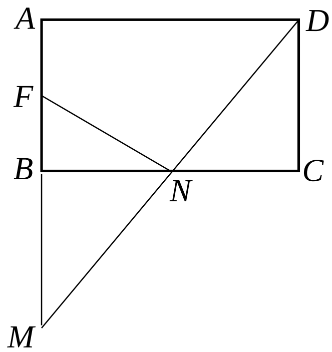
B	A	N
A	N	A
N	A	N

In quanti modi diversi si può leggere la parola BANANA nella tabella in figura, tenendo presente che, per ogni cella “letta”, la successiva deve condividere con essa un lato e che una stessa cella può essere “letta” più volte?

Risposta: 0084. Sol. La simmetria della tabella facilita il conteggio dei casi possibili. Consideriamo quanto succede partendo dalla cella 1 (discorso simmetrico si ha partendo dalla cella 3): si può andare sulla cella 2 o sulla cella 4. Nel primo caso, tenuto conto che ci sono 2 possibili scelte nella cella 2, 4 nella cella 4, 3 nella cella 5 e 2 nella cella 8, si evidenziano 14 possibilità. Con le stesse considerazioni, nel secondo caso si evidenziano 28 possibilità.

B	1 A	2 N
3 A	4 N	5 A
6 N	7 A	8 N

14. L’area del rettangolo



In figura, *ABCD* è un rettangolo, *F* è il punto medio del lato *AB*, *N* è il punto medio del lato *BC* e *M* è il punto comune alle rette che contengono una il lato *AB*, l’altra il segmento *DN*. L’area del triangolo *FMN* vale 99. Quanto vale l’area del rettangolo *ABCD*?

Risposta: 0264. Sol. Il triangolo *BMN* è congruente a *CDN* e quindi ha area che è un quarto di quella del rettangolo; il triangolo *FBN* ha area che è un ottavo di quella del rettangolo; quindi l’area di *FMN* è tre ottavi di quella del rettangolo.

15. Cento numeri in linea

Di un allineamento di 100 numeri interi positivi, si sa che ognuno dei numeri diversi dal primo dell’allineamento e dall’ultimo è la media aritmetica dei due che gli sono adiacenti. Si sa inoltre che uno dei 100 numeri è 2.023 e che non ve ne sono di maggiori. Per il più piccolo dei numeri dell’allineamento vi sono diversi possibili valori: se M è il maggiore di questi possibili valori e m è il minore, quanto vale $M + m$?

Risposta: 2066. Sol. Se i numeri sono tutti 2.023, M = 2.023. In caso contrario 2.023 compare solo a un estremo dell’allineamento e i numeri devono essere tutti diversi tra loro e ordinati in ordine crescente o decrescente: assumere uno o l’altro dei due ordinamenti non altera le considerazioni sul minimo. Sia l’ordine crescente: i numeri, essendo distinti, sono necessariamente in progressione aritmetica (la distanza del secondo dal terzo, che è uguale a quella del secondo dal primo, è anche uguale a quella del terzo dal quarto ecc.). Quindi se il primo numero è m, il 100-esimo deve essere $m+99k$ ove k è la ragione della progressione e quindi $(2023 – m)$ deve essere multiplo di 99 e quindi è al più 1980 (k=20). Quindi m = 43.