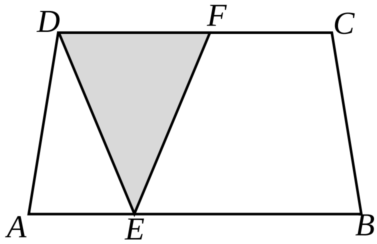
Kangourou della Matematica 2023
Coppa Kangourou a squadre
Finale 1
Cervia, 4 maggio 2023

Quesiti

1. Le caramelle
In un certo gruppo di persone, ciascuno ha tre caramelle che possono essere esclusivamente al limone o all'arancia. 90 persone hanno almeno due caramelle al limone, 45 hanno almeno due caramelle all'arancia, 34 hanno due caramelle di gusto diverso. Quante persone hanno tre caramelle dello stesso gusto?

2. Il trapezio
Il trapezio *ABCD* in figura è isoscele; anche il triangolo *DEF* ombreggiato è isoscele e la sua area è un quarto dell'area del trapezio. La base maggiore e la base minore del trapezio *ABCD* misurano rispettivamente 220 e 180 cm. Quanti centimetri misura il segmento *AE*?



3. Il campo estivo
Marco e suo fratello si sono iscritti a un campo estivo. Il costo settimanale dell'iscrizione di un ragazzo a tale campo è di 60 euro, ma se una famiglia iscrive più di un figlio ha diritto alla quota agevolata di 54 euro per ogni figlio dal secondo in poi. Per le iscrizioni alla prima settimana sono stati raccolti 3.000 euro e più della metà degli iscritti sono figli unici. Qual è al minimo il numero degli iscritti?

4. La pista circolare
Paolo e Gino si allenano alla corsa lungo una pista circolare. Partono da uno stesso punto, ma corrono in versi opposti, ciascuno alla propria velocità mantenuta costante. Quando si incontrano per la prima volta, Paolo ha percorso 100 metri dalla partenza; quando si incontrano per la seconda, Gino ha percorso 150 metri dal punto del primo incontro. Quanti metri è lunga la pista?

5. *SUDOKU*
Le sei lettere della parola *SUDOKU* vanno inserite nelle sei celle di una griglia 2×3 in modo che nessuna riga e nessuna colonna ospiti entrambe le lettere *U*. Quanti diversi inserimenti sono possibili?

6. In palestra
I frequentatori di una palestra sono ripartiti in gruppi tutti ugualmente numerosi, ciascuno seguito da un istruttore. Assumendo 10 istruttori in più, ogni gruppo potrebbe ridursi di 5 unità; assumendone invece 20 in più, ogni gruppo potrebbe ridursi di 8 unità. Quanti sono i frequentatori della palestra?

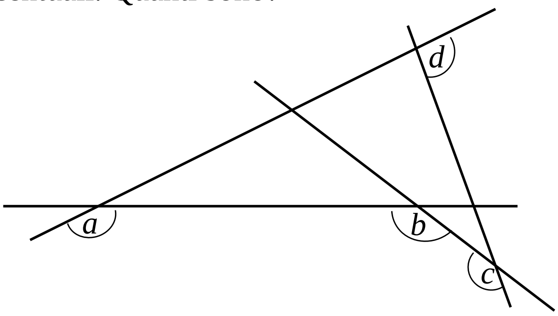
7. L’area del quadrato

Un quadrato è scomposto in sei figure piane come mostrato in figura. Quelle in bianco sono due triangoli rettangoli isosceli, un quadrato e un parallelogramma; una delle due in nero è un triangolo rettangolo isoscele, l’altra (che ha in comune un solo punto con la precedente) è scomponibile in due triangoli rettangoli isosceli. L’area della porzione del quadrato rimasta bianca è 99 cm^2. Di quanti centimetri quadrati è l’area del quadrato originario?

8. Le tre domande

A un certo numero di studenti sono state rivolte le stesse tre domande. 1260 di essi hanno risposto correttamente alla prima domanda: rappresentano esattamente il 70% del totale. La percentuale degli studenti che hanno risposto correttamente alla seconda è il 79%, la percentuale degli studenti che hanno risposto correttamente alla terza è il 53%. Gli studenti che hanno risposto correttamente a tutte le tre domande sono il minimo compatibile con queste percentuali. Quanti sono?

9. La somma degli angoli

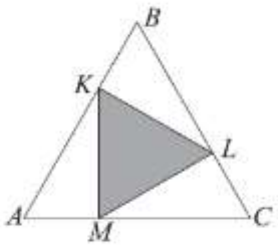


Quanto vale $a + b + c + d$, dove a, b, c, d sono le misure in gradi degli angoli indicati in figura?

10. La frazione

Sia $AB0$ il generico numero intero positivo di tre cifre ($A \neq 0$), la cui cifra delle unità sia zero. Quanto vale la somma del più piccolo e del più grande fra i valori che l’espressione $\frac{AB0}{A+B}$ può assumere?

11. Due triangoli equilateri



All’interno del triangolo equilatero ABC in figura è stato ottenuto il triangolo KLM che ha ogni lato perpendicolare ad uno dei lati di ABC. L’area di ABC è 150. Quanto vale l’area di KLM?

12. Cento numeri in cerchio

Su una circonferenza sono scritti 100 numeri, ognuno dei quali è la media aritmetica dei due che gli sono adiacenti. Uno di essi è 2.023 e non ve ne sono di maggiori. Quanto vale il più piccolo?

13. Il 500-esimo termine

Pensate di ordinare in successione crescente tutti i numeri interi positivi che non sono né quadrati perfetti, né cubi perfetti. Qual è il 500-mo termine della successione?

14. Il triplo di *n*

Sia n un numero intero di sei cifre 1ABCDE. Se il numero $3 \times n$ è ABCDE1, quanto vale il prodotto delle cifre di n?

15. L’orologio

Un orologio tradizionale con le 12 ore e le lancette delle ore e dei minuti segna le 8 e 6 minuti. Quanti gradi misura il minore degli angoli tra le due lancette?

Kangourou della Matematica 2023
Coppa Kangourou a squadre
Finale 1
Cervia, 4 maggio 2023

Quesiti e soluzioni

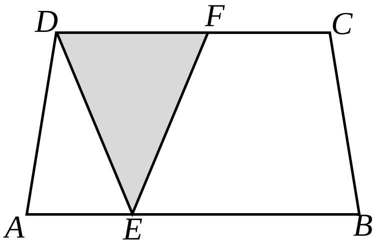
1. Le caramelle

In un certo gruppo di persone, ciascuno ha tre caramelle che possono essere esclusivamente al limone o all'arancia. 90 persone hanno almeno due caramelle al limone, 45 hanno almeno due caramelle all'arancia, 34 hanno due caramelle di gusto diverso. Quante persone hanno tre caramelle dello stesso gusto?

Risposta: 0101. Sol. Nessuno ha quattro caramelle, dunque le 90 persone che hanno due caramelle al limone sono diverse da quelle che ne hanno due all'arancia: complessivamente le persone del gruppo sono allora $90 + 45 = 135$, e da questo numero va levato quello (34) delle persone con caramelle di gusto diverso.

2. Il trapezio

Il trapezio *ABCD* in figura è isoscele; anche il triangolo *DEF* ombreggiato è isoscele e la sua area è un quarto dell'area del trapezio. La base maggiore e la base minore del trapezio *ABCD* misurano rispettivamente 220 e 180 cm. Quanti centimetri misura il segmento *AE*?



Risposta: 0070. Sol. Il segmento *DF* misura un quarto della somma delle lunghezze delle basi, dunque 100 cm. La lunghezza del segmento *AE* è la metà della differenza delle lunghezze delle basi del trapezio (20 cm) più la metà della lunghezza di *DF* (50 cm).

3. Il campo estivo

Marco e suo fratello si sono iscritti a un campo estivo. Il costo settimanale dell'iscrizione di un ragazzo a tale campo è di 60 euro, ma se una famiglia iscrive più di un figlio ha diritto alla quota agevolata di 54 euro per ogni figlio dal secondo in poi. Per le iscrizioni alla prima settimana sono stati raccolti 3.000 euro e più della metà degli iscritti sono figli unici. Qual è al minimo il numero degli iscritti?

Risposta: 0051. Sol. Supponiamo che

- tra gli iscritti che hanno pagato 60 €, sia x il numero di quelli che non hanno fratelli iscritti e y il numero di quelli che ne hanno,
- sia z il numero degli iscritti che hanno pagato 54 € (in quanto fratelli di un primo iscritto):

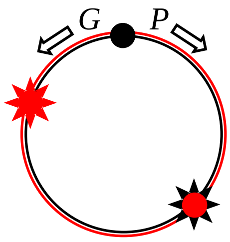
dato che c'è almeno una coppia di fratelli, risulta $1 \leq y \leq z$.
Da $60(x + y) + 54z = 3000$ si ricava che $9z = 500 - 10(x + y)$ cioè z deve essere un multiplo di 10: $z = 10n$ con $n \geq 1$, intero. Dunque $x + y = 50 - 9n$ e il numero totale di iscritti è $50 + n$.

Se è $n = 1$, cioè $z = 10$, il numero totale degli iscritti è 51 e più della metà di questi non ha fratelli iscritti, poiché $x + y = 41$ con $1 \leq y \leq 10$ e quindi $31 \leq x \leq 40$. Dato che in generale il numero totale di iscritti è $50 + n$, sicuramente 51 è il minimo numero di iscritti al campo.
Osservazione. Se è $n = 2$ (cioè $z = 20$, con numero totale di iscritti 52) si può ancora realizzare la condizione che più della metà di loro non abbia fratelli iscritti, purché sia $27 \leq x \leq 31$ (e quindi $1 \leq y \leq 5$). Negli altri tre casi possibili ($3 \leq n \leq 5$) già la somma $x + y$ è inferiore alla metà del numero totale di iscritti e quindi questi non sarebbero comunque casi da prendere in esame.

4. La pista circolare

Paolo e Gino si allenano alla corsa lungo una pista circolare. Partono da uno stesso punto, ma corrono in versi opposti, ciascuno alla propria velocità mantenuta costante. Quando si incontrano per la prima volta, Paolo ha percorso 100 metri dalla partenza; quando si incontrano per la seconda, Gino ha percorso 150 metri dal punto del primo incontro. Quanti metri è lunga la pista?

Risposta: 0250. Sol. Si può pensare il punto di primo incontro (stella nera) come una ripartenza. Poiché corrono ciascuno a velocità costante, al secondo incontro Paolo avrà percorso ancora 100 metri, mentre Gino, che corre in verso opposto, ha percorso 150 metri, come detto nel testo: in totale 250 metri.



5. *SUDOKU*

Le sei lettere della parola *SUDOKU* vanno inserite nelle sei celle di una griglia 2×3 in modo che nessuna riga e nessuna colonna ospiti entrambe le lettere *U*. Quanti diversi inserimenti sono possibili?

Risposta: 0144. Sol. Per ogni assegnazione di una delle *U* in una riga, ve ne sono due possibili per l'altra *U* nell'altra riga: dunque per la coppia di *U* le possibilità sono complessivamente 6. Per ognuna di esse, le altre 4 lettere possono essere collocate a piacere, dunque in 24 modi diversi.

6. In palestra

I frequentatori di una palestra sono ripartiti in gruppi tutti ugualmente numerosi, ciascuno seguito da un istruttore. Assumendo 10 istruttori in più, ogni gruppo potrebbe ridursi di 5 unità; assumendone invece 20 in più, ogni gruppo potrebbe ridursi di 8 unità. Quanti sono i frequentatori della palestra?

Risposta: 0600. Sol. Se attualmente ogni istruttore ha k allievi e gli istruttori sono N, il numero di frequentanti deve essere $kN = (k - 5)(N + 10) = (k - 8)(N + 20)$, cioè devono essere contemporaneamente vere le uguaglianze $10k = 5N + 50$ e $20k = 8N + 160$ che porta a $2N = 60$ e quindi $k = 20$.

7. L'area del quadrato

Un quadrato è scomposto in sei figure piane come mostrato in figura. Quelle in bianco sono due triangoli rettangoli isosceli, un quadrato e un parallelogramma; una delle due in nero è un triangolo rettangolo isoscele, l'altra (che ha in comune un solo punto con la precedente) è scomponibile in due triangoli rettangoli isosceli. L'area della porzione del quadrato rimasta bianca è 99 cm^2. Di quanti centimetri quadrati è l'area del quadrato originario?

Risposta: 0176. Sol. Il quadrato grande è scomponibile in 16 triangoli congruenti al triangolo isoscele piccolo T, di cui 9 bianchi. Quindi l'area di T è 11 cm^2 e quella del quadrato grande 16×11 cm^2.

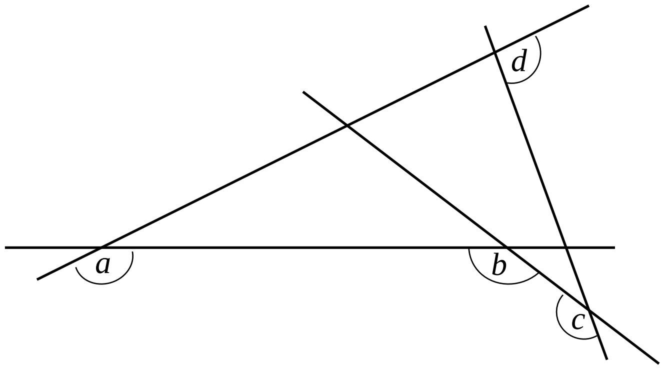
8. Le tre domande

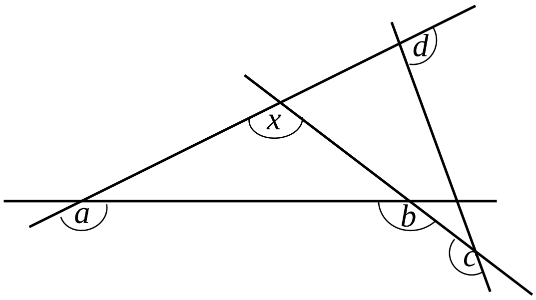
A un certo numero di studenti sono state rivolte le stesse tre domande. 1260 di essi hanno risposto correttamente alla prima domanda: rappresentano esattamente il 70% del totale. La percentuale degli studenti che hanno risposto correttamente alla seconda è il 79%, la percentuale degli studenti che hanno risposto correttamente alla terza è il 53%. Gli studenti che hanno risposto correttamente a tutte le tre domande sono il minimo compatibile con queste percentuali. Quanti sono?

Risposta: 0036. Sol. Per semplificare il calcolo, supponiamo inizialmente che gli studenti complessivamente fossero 100. Almeno 79 – 30 = 49 di essi devono aver risposto correttamente ad entrambe le prime due domande, ed è possibile che siano solo 49: poiché gli studenti che hanno sbagliato la terza risposta sono 47, almeno 2 dei 49 devono aver risposto correttamente a tutte le tre domande, ed è possibile che siano solo 2. Gli studenti sono complessivamente 10 × 1260 / 7 = 1800: il 2% di 1800 è 36.

9. La somma degli angoli

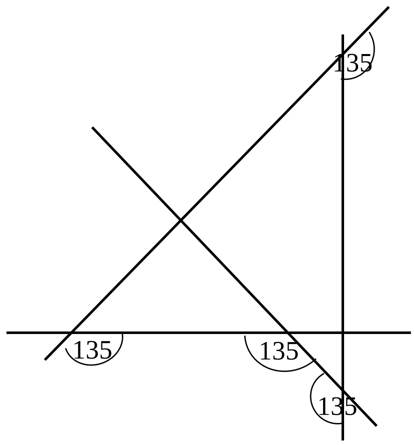
Quanto vale $a + b + c + d$, dove a, b, c, d sono le misure in gradi degli angoli indicati in figura?





Risposta: 0540. Sol. Chiamata x la misura dell'angolo indicato in figura, si ha $x = a + b - 180$. D'altra parte si ha $180 - x + 180 - c + 180 - d = 180$, da cui $540 - x - c - d = 180$ che porta al risultato.

N. B. In realtà la soluzione può essere immediata, dato che l'assunto del problema è che la somma non dipende dalla figura, e quindi basta pensare che ci siano due coppie di rette ortogonali che formano triangoli rettangoli isosceli per avere quattro angoli congruenti di misura 135°.



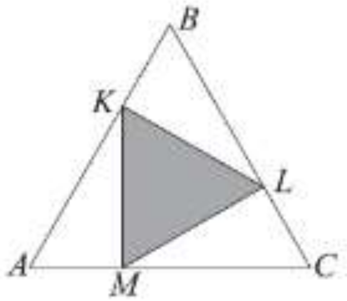
10. La frazione

Sia $AB0$ il generico numero intero positivo di tre cifre ($A \neq 0$), la cui cifra delle unità sia zero. Quanto vale la somma del più piccolo e del più grande fra i valori che l'espressione $\dfrac{AB0}{A+B}$ può assumere?

Risposta: 0119. Sol. Osserviamo che, qualunque sia il valore della somma $A + B$, per massimizzare il rapporto conviene prendere $B = 0$ e massimizzare la cifra delle centinaia: in tutti i casi il rapporto vale 100. Invece, per minimizzare il rapporto conviene prendere $B = 9$ e minimizzare la cifra delle centinaia. Per $A = 1$, il rapporto vale $190/10 = 19$ e questo valore è il minimo possibile, poiché si verifica facilmente che se $A > 1$, allora $\frac{100A+90}{A+9} > 19$.

11. Due triangoli equilateri

All'interno del triangolo equilatero *ABC* in figura è stato ottenuto il triangolo *KLM* che ha ogni lato perpendicolare ad uno dei lati di *ABC*. L'area di *ABC* è 150. Quanto vale l'area di *KLM*?



Risposta: 0050. Sol. Per motivi di simmetria i tre triangoli rettangoli sono congruenti. L'angolo $\widehat{KAM}$ misura 60°: quindi la lunghezza di AK è il doppio di quella di AM e, poiché AM e KB sono congruenti, la lunghezza di AK è $\frac{2}{3}$ della lunghezza di AB. Quindi l'area di AMK è $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 150$ e quella di KLM è $\left[1 - 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \times 150 = 50$.

12. Cento numeri in cerchio

Su una circonferenza sono scritti 100 numeri, ognuno dei quali è la media aritmetica dei due che gli sono adiacenti. Uno di essi è 2.023 e non ve ne sono di maggiori. Quanto vale il più piccolo?

Risposta: 2023. Sol. Poiché 2.023 ha due numeri adiacenti di cui è la media, ma nessuno gli è superiore, entrambi devono essere 2.023. Ne segue subito che tutti i numeri devono essere 2.023.

13. Il 500-esimo termine

Pensate di ordinare in successione crescente tutti i numeri interi positivi che non sono né quadrati perfetti, né cubi perfetti. Qual è il 500-mo termine della successione?

Risposta: 0528. Sol. La radice quadrata di 500 è compresa fra 22 e 23 e quella cubica fra 7 e 8; solo 1 e 64, tra i numeri minori di 500, sono sia quadrati sia cubi perfetti. Allora ai 500 – 22 – 7 + 2 numeri restanti minori di 500 occorre aggiungere 27 numeri. Tra 501 e 527 non ci sono quadrati perfetti, ma c'è 512 che è il cubo di 8: va aggiunto allora anche 528, che è accettabile.

14. Il triplo di *n*

Sia *n* un numero intero di sei cifre 1ABCDE. Se il numero 3 × *n* è ABCDE1, quanto vale il prodotto delle cifre di *n*?

Risposta: 2240. Sol. E deve essere 7: allora 3 × D + 2 termina con 7, dunque D deve essere 5; poiché 3 × C + 1 termina per 5, C deve essere 8; poiché 3 × B + 2 termina per 8, deve essere B = 2; poiché 3 × A termina per 2, deve essere A = 4. Allora *n* = 142.857.

15. L'orologio

Un orologio tradizionale con le 12 ore e le lancette delle ore e dei minuti segna le 8 e 6 minuti. Quanti gradi misura il minore degli angoli tra le due lancette?

Risposta: 0153. Sol. Alle 8:00 il minore degli angoli misura 120 gradi. Ogni minuto la lancetta dei minuti ruota di 6 gradi, quella delle ore di mezzo grado (nello stesso verso). Rispetto alle 8:00, il minore degli angoli aumenta allora di 33 gradi.