



Kangourou della Matematica 2022
Coppa Kangourou a squadre
Finale 2
Cervia, 6 maggio 2022



Quesiti

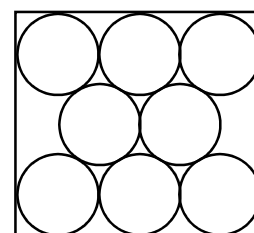
1. L'espressione

Scrivete la somma delle cifre del risultato della seguente espressione:

$$(123.456.789)^2 - 123.455.789 \times 123.456.789.$$

2. Il lato verticale

Un rettangolo ospita otto dischi circolari tutti dello stesso raggio. Alcuni dischi sono tangenti fra loro e/o tangenti ai lati del rettangolo come indicato dalla figura. Il lato superiore del rettangolo è lungo $30(\sqrt{3} - 1)$ cm. Quanti centimetri è lungo ogni lato verticale?



3. Il più forte

Tra 2022 tennisti sulla cui abilità non si sa nulla a priori, si vuole individuare il più forte disputando solo incontri singoli. Qual è il minimo numero di incontri che consente di farlo? (Si assuma che, in ogni incontro singolo, vinca sempre il più forte e che, se A è più forte di B e B lo è di C , allora A sia più forte di C .)

4. I resti

Qual è il più piccolo numero intero positivo che diviso per 3 dà resto 1, diviso per 4 dà resto 2, diviso per 5 dà resto 3, diviso per 6 dà resto 4 e diviso per 7 dà resto 5?

5. L'aereo

Sapendo che l'aereo che trasporta un farmaco salvavita atterrerà a un certo orario, un'auto medica parte dall'ospedale in modo da raggiungere l'aeroporto esattamente a quell'ora. L'aereo arriva in anticipo: quindi un incaricato parte dall'aeroporto con il farmaco e va incontro all'auto medica; dopo aver viaggiato 45 minuti, consegna il farmaco all'auto medica che riesce a consegnare il farmaco all'ospedale 20 minuti prima di quanto era inizialmente previsto. Con quanti minuti di anticipo è arrivato l'aereo? (Considerate costante la velocità dell'auto e trascurabili i tempi per i passaggi di mano del farmaco.)

6. Due cifre

Le due cifre A e B sono tali che $[3(2022 + A)]^2 = 36.94B.084$. Scrivete il numero $00AB$.

7. Il volume

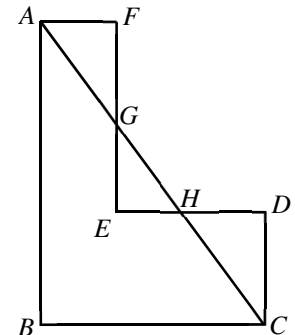
Un parallelepipedo rettangolo ha base quadrata $ABCD$; la faccia laterale $ABB'A'$ ha lato minore AB e l'angolo acuto formato dalle sue diagonali misura 60 gradi. Detti O il punto di intersezione di tali diagonali ed E il piede della perpendicolare condotta dal vertice A alla diagonale BA' , il segmento OE misura $4\sqrt{3}$ cm. Di quanti centimetri cubici è il volume del parallelepipedo?

8. I candidati

Un test prevede 10 domande numerate da 1 a 10. Un candidato guadagna in positivo o in negativo il punteggio coincidente con il numero d'ordine della domanda a seconda che risponda, rispettivamente, in modo corretto o sbagliato; risposta non data equivale a risposta sbagliata. (Ad esempio, rispondendo correttamente alla domanda n. 5 si guadagnano 5 punti, mentre se ne perdono 5 se si fornisce risposta sbagliata o non si risponde.) Per essere sicuri che vi siano almeno due candidati che realizzino lo stesso punteggio, quanti devono essere al minimo i candidati?

9. La ELLE

In figura vedete lo schema di una regione "a L" (con due terne di lati paralleli e angoli convessi interni retti): i segmenti AB , BC , CD e FA sono lunghi rispettivamente 96, 72, 36 e 24 metri. Qual è la misura in metri del segmento GH ?



10. Quadrato perfetto

Qual è il più grande numero di quattro cifre che, moltiplicato per 17, dà come risultato un quadrato perfetto?

11. Quadrati in coppia

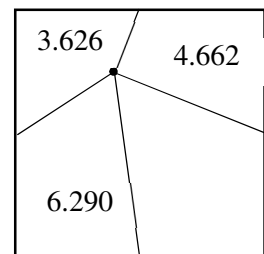
Per alcuni valori di n , ma non per tutti, l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ dei primi n interi positivi può essere ordinato in modo che la somma di due interi che, in questo nuovo ordine, vengono a trovarsi adiacenti sia sempre un quadrato perfetto. Qual è il più piccolo tra i valori di n per i quali ciò accade?

12. La media degli altri

Considerate tutti i numeri interi da 1 a 100, 1 e 100 inclusi. Diciamo che uno di questi interi è *speciale* se, eliminando tale numero e nessun altro, la media dei rimanenti è un numero intero. Quanto vale la somma dei numeri speciali?

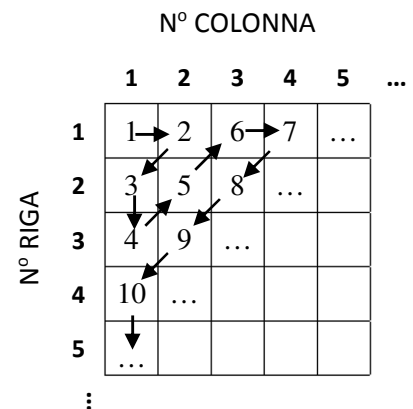
13. Il lato

Osservate la figura: i punti medi dei lati di un di un quadrato sono stati congiunti con uno stesso punto interno al quadrato. Ogni numero presente in uno dei quattro quadrilateri in cui resta ripartito il quadrato rappresenta la misura in metri quadrati della superficie di tale quadrilatero. Quanti metri è lungo il lato del quadrato? *Rispondete 0000 se pensate che ci sia più di una risposta corretta possibile.*



14. Il numero 2022

I numeri interi positivi sono inseriti, uno per casella, in una griglia immaginaria illimitata verso destra e verso il basso, secondo lo schema illustrato dalla figura. In quale casella risulta inserito il numero 2022? (*Scrivete nell'ordine la riga e la colonna che determinano la casella, ad esempio se fossero l'ottava riga e la ventesima colonna dovrete scrivere 0820.*)



15. Il numero minore

Ho scritto 5 numeri naturali consecutivi, poi ne ho moltiplicato uno per 10 e, così modificato, l'ho sommato agli altri 4, ottenendo come somma 10.000. Qual è il minore dei cinque numeri iniziali?



Kangourou della Matematica 2022
Coppa Kangourou a squadre
Finale 2
Cervia, 6 maggio 2022



Quesiti e soluzioni

1. L'espressione

Scrivete la somma delle cifre del risultato della seguente espressione:

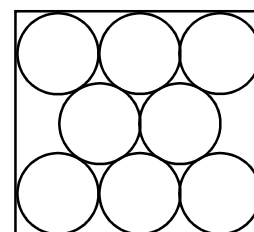
$$(123.456.789)^2 - 123.455.789 \times 123.456.789.$$

Risposta: 0045.

Sol. Chiaramente il risultato è $123.456.789 \times (123.456.789 - 123.455.789) = 123.456.789 \times 1.000$.

2. Il lato verticale

Un rettangolo ospita otto dischi circolari tutti dello stesso raggio. Alcuni dischi sono tangenti fra loro e/o tangenti ai lati del rettangolo come indicato dalla figura. Il lato superiore del rettangolo è lungo $30(\sqrt{3} - 1)$ cm. Quanti centimetri è lungo ogni lato verticale?



Risposta: 0020.

Sol. Scartando il primo e il terzo disco di una riga in cui ce ne sono tre, i centri dei rimanenti sono sul bordo di un triangolo equilatero di lato $20(\sqrt{3} - 1)$, dunque di altezza $10(3 - \sqrt{3})$

Aggiungendo $10(\sqrt{3} - 1)$ si ottiene la misura cercata: 20.

3. Il più forte

Tra 2022 tennisti sulla cui abilità non si sa nulla a priori, si vuole individuare il più forte disputando solo incontri singoli. Qual è il minimo numero di incontri che consente di farlo? (Si assuma che, in ogni incontro singolo, vinca sempre il più forte e che, se A è più forte di B e B lo è di C , allora A sia più forte di C .)

Risposta: 2021.

Sol. 2021 incontri sono sufficienti: numerati a caso i tennisti, il primo nella numerazione gioca con il secondo, il vincitore affronta il terzo e così via. Meno incontri non possono bastare perché devono esserci almeno 2021 perdenti.

4. I resti

Qual è il più piccolo numero intero positivo che diviso per 3 dà resto 1, diviso per 4 dà resto 2, diviso per 5 dà resto 3, diviso per 6 dà resto 4 e diviso per 7 dà resto 5?

Risposta: 0418.

Sol. La differenza fra divisore e resto è sempre 2: allora il numero è il MCM dei divisori meno 2.

5. L'aereo

Sapendo che l'aereo che trasporta un farmaco salvavita atterrerà a un certo orario, un'auto medica parte dall'ospedale in modo da raggiungere l'aeroporto esattamente a quell'ora. L'aereo arriva in anticipo: quindi un incaricato parte dall'aeroporto con il farmaco e va incontro all'auto medica; dopo aver viaggiato 45 minuti, consegna il farmaco all'auto medica che riesce a consegnare il farmaco all'ospedale 20 minuti prima di quanto era inizialmente previsto. Con quanti minuti di anticipo è arrivato l'aereo? (*Considerate costante la velocità dell'auto e trascurabili i tempi per i passaggi di mano del farmaco.*)

Risposta: 0055.

Sol. L'automedica avrebbe impiegato 10 minuti per raggiungere l'aeroporto dal punto in cui gli hanno consegnato il farmaco. L'ora prevista di arrivo dell'aereo era dunque 45 + 10 minuti dopo.

6. Due cifre

Le due cifre A e B sono tali che $[3(2022 + A)]^2 = 36.94B.084$. Scrivete il numero $00AB$.

Risposta: 0042.

Sol. Il secondo membro dell'uguaglianza deve essere divisibile per 9, dunque deve essere $B = 2$. Si ha $36.942.084 / 9 = 4.104.676$, dunque $2 + A$ può essere solo 4 o 6: una facile verifica fornisce $A = 4$.

7. Il volume

Un parallelepipedo rettangolo ha base quadrata $ABCD$; la faccia laterale $ABB'A'$ ha lato minore AB e l'angolo acuto formato dalle sue diagonali misura 60 gradi. Detti O il punto di intersezione di tali diagonali ed E il piede della perpendicolare condotta dal vertice A alla diagonale BA' , il segmento OE misura $4\sqrt{3}$ cm. Di quanti centimetri cubici è il volume del parallelepipedo?

Risposta: 4608.

Sol. Per brevità denoto con x la lunghezza di OE . Il triangolo AOB è equilatero, dunque AB è lungo 2 volte OE : quindi l'area di base del parallelepipedo è $4x^2$ mentre la sua altezza è il doppio di quella del triangolo AOB cioè $2x\sqrt{3}$. Ne consegue che il volume è $8x^3\sqrt{3}=4608$.

8. I candidati

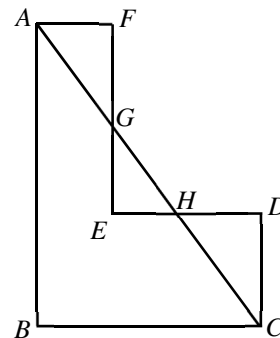
Un test prevede 10 domande numerate da 1 a 10. Un candidato guadagna in positivo o in negativo il punteggio coincidente con il numero d'ordine della domanda a seconda che risponda, rispettivamente, in modo corretto o sbagliato; risposta non data equivale a risposta sbagliata. (Ad esempio, rispondendo correttamente alla domanda n. 5 si guadagnano 5 punti, mentre se ne perdono 5 se si fornisce risposta sbagliata o non si risponde.) Per essere sicuri che vi siano almeno due candidati che realizzino lo stesso punteggio, quanti devono essere al minimo i candidati?

Risposta: 0057.

Sol. I punteggi realizzabili sono 56. Infatti il massimo punteggio realizzabile è 55, il minimo è -55 e, procedendo induttivamente a partire da ± 1 , si vede subito che sono realizzabili tutti e soli i punteggi dispari.

9. La ELLE

In figura vedete lo schema di una regione “a L” (con due terne di lati paralleli e angoli convessi interni retti): i segmenti AB , BC , CD e FA sono lunghi rispettivamente 96, 72, 36 e 24 metri. Qual è la misura in metri del segmento GH ?



Risposta: 0035.

Sol. Tutti i triangoli rettangoli in figura sono simili e con i lati in rapporto 3:4:5 (basta osservarlo sui cateti di AB e BC). Dato che $FG:FA=4:3$ il cateto FG è lungo 32 metri per cui EG è lungo $96 - 36 - 32 = 28 = 7 \times 4$ metri e GH è lungo $7 \times 5 = 35$ metri.

10. Quadrato perfetto

Qual è il più grande numero di quattro cifre che, moltiplicato per 17, dà come risultato un quadrato perfetto?

Risposta: 9792.

Sol. Poiché 17 è primo, il numero cercato deve essere un quadrato perfetto moltiplicato per 17. Il più grande quadrato perfetto che, moltiplicato per 17, dia un numero di 4 cifre è 24×24 .

11. Quadrati in coppia

Per alcuni valori di n , ma non per tutti, l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ dei primi n interi positivi può essere ordinato in modo che la somma di due interi che, in questo nuovo ordine, vengono a trovarsi adiacenti sia sempre un quadrato perfetto. Qual è il più piccolo tra i valori di n per i quali ciò accade?

Risposta: 0015.

Sol. Per minimizzare n bisogna che le somme siano tra i quadrati più piccoli: 4, 9, 16 (eventualmente 25...) e bisogna che ogni numero (tranne i due alle estremità dell'allineamento) ammetta due complementi a uno di questi quadrati.

- 2 può complementare solo a 9 e a 16, quindi 7 e 14 sono nell'insieme e quindi nell'insieme ci sono 8, 9, 10, 11, 12, 13;
- 8 può complementare solo a 9 con 1 (e a 25 ma richiederebbe di avere nell'insieme 17);
- 9 può complementare solo a 16 con 7 (e a 25 ma richiederebbe di avere nell'insieme 16);
- i restanti quattro possono complementare a 16 e a 25, ma bisogna aggiungere all'insieme il numero 15 (che va bene perché può complementare anche a 16 oltre che a 25).

Dunque questi 15 numeri hanno un unico possibile allineamento che rispetti la richiesta (a parte leggerlo da sinistra a destra o viceversa): 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9.

12. La media degli altri

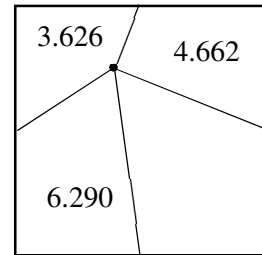
Considerate tutti i numeri interi da 1 a 100, 1 e 100 inclusi. Diciamo che uno di questi interi è *speciale* se, eliminando tale numero e nessun altro, la media dei rimanenti è un numero intero. Quanto vale la somma dei numeri speciali?

Risposta: 0101.

Sol. La somma dei primi 100 interi positivi è 5050. Vogliamo appurare per quali n fra di essi il numero $(5050 - n) / 99$ sia intero. Quando n intero varia tra 1 e 100, $5050 - n$ varia tra 5049 e 4950. Tra questi ultimi 100 numeri, solo 5049 e 4950, che si ottengono rispettivamente per $n = 1$ e $n = 100$, sono multipli di 99.

13. Il lato

Osservate la figura: i punti medi dei lati di un di un quadrato sono stati congiunti con uno stesso punto interno al quadrato. Ogni numero presente in uno dei quattro quadrilateri in cui resta ripartito il quadrato rappresenta la misura in metri quadrati della superficie di tale quadrilatero. Quanti metri è lungo il lato del quadrato? *Rispondete 0000 se pensate che ci sia più di una risposta corretta possibile.*



Risposta: 0148.

Sol. Ordinando i quadrilateri in verso orario a partire dal vertice in alto a sinistra, è noto che la somma delle aree del 1° e del 3° è uguale alla somma delle aree del 2° e del 4°. Quindi l'area del quadrato è $2 \times (6290 + 4662) = 2 \times 10.952 = 21.904$. La radice quadrata di tale numero può essere determinata per approssimazioni successive tenendo conto che $14^2 = 196$ e $15^2 = 225$, quindi la radice quadrata è più prossima a 150 che a 140 e visto che il quadrato della cifra delle unità è 4, deve essere 148.

14. Il numero 2022

I numeri interi positivi sono inseriti, uno per casella, in una griglia immaginaria illimitata verso destra e verso il basso, secondo lo schema illustrato dalla figura. In quale casella risulta inserito il numero 2022? (*Scrivete nell'ordine la riga e la colonna che determinano la casella, ad esempio se fossero l'ottava riga e la ventesima colonna dovreste scrivere 0820.*)

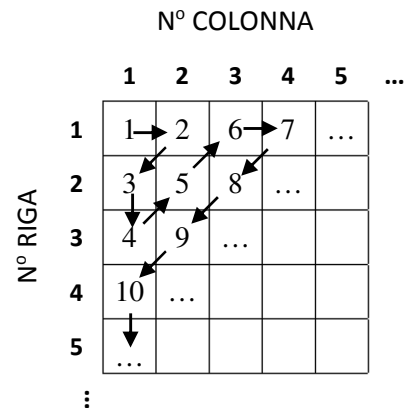
		N° COLONNA					
		60	61	62	63	64	...
N° RIGA	1				2016	2017	
	2				2018		
	3			2019			
	4		2020				
	5	2021					
2022							

Risposta: 0659.

Sol. Riempito il triangolo di vertici $(1,1)$, $(1,n)$ e $(n,1)$, si sono collocati i primi

$$1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

interi. L'ultimo intero n che rende questa somma minore di 2022 è 63, in corrispondenza al quale la somma vale 2016. Alla casella $(1,63)$ si arriva dal basso: infatti, la somma dei primi k interi compare al posto k -esimo della prima colonna se k è pari, della prima riga se k è dispari. Allora il numero che ospitato nella casella $(1,63)$ è 2016: si tratta ora di spostarsi nella casella $(1,64)$ che ospita 2017 e scendere di 5 passi.



15. Il numero minore

Ho scritto 5 numeri naturali consecutivi, poi ne ho moltiplicato uno per 10 e, così modificato, l'ho sommato agli altri 4, ottenendo come somma 10.000. Qual è il minore dei cinque numeri iniziali?

Risposta: 0711.

Sol. Ho sommato 10 volte lo stesso numero e ho aggiunto 4 numeri che differiscono al più di ± 4 da tale numero. Quindi il numero moltiplicato per 10 è "pressappoco" la 14-esima parte di 10.000, cioè circa 714. Ora osserviamo che, se n è il numero centrale della cinquina e k il numero moltiplicato per 10, si deve avere $5n + 9k = 10.000$, quindi k deve essere divisibile per 5 e quindi l'unico candidato è 715. Ora $10.000 - 7150 = 2850 = 710 \times 4 + 10$ e quindi la cinquina deve essere 711, 712, 713, 714, 715.