



Kangourou della Matematica 2022

Coppa Junior a squadre

Finale 1

Cervia, 4 maggio 2022



Quesiti

1. Il referendum

In un paese è stato indetto un referendum, fra 252 votanti, in favore o contro la costruzione di una pista ciclabile. La percentuale dei voti a favore sui primi 240 voti scrutinati è rimasta identica sul totale quando sono stati scrutinati i rimanenti 12 voti, dei quali 7 erano a favore. Quanti sono risultati, alla fine, i voti favorevoli?

2. Le balene

Due balene nuotano fianco a fianco in linea retta alla velocità di 6 km all'ora. A un certo istante una delle due accelera a 10 km all'ora, percorre un certo tratto quindi inverte la rotta e torna indietro, sempre a 10 km all'ora, fino a incontrare l'altra che invece ha proseguito sempre a 6 km all'ora. Se le balene si sono separate alle 9:15 e incontrate alle 11:00, a che ora la balena "veloce" ha invertito la rotta? (Scrivi l'ora senza i due punti, ad esempio per le 9:15 scrivi 0915.)

3. Quanti vertici?

In corrispondenza di ciascuno dei vertici e nel centro di un poligono regolare di n lati (n pari) è stato scritto un numero intero positivo. Gli $n + 1$ numeri scritti sono stati scelti in modo che fossero tutti diversi tra loro e che, al variare delle coppie di vertici opposti (cioè allineati con il centro), la somma dei tre numeri allineati (nei due vertici e nel centro) fosse sempre la stessa e la minima possibile. Con questi presupposti tale somma è risultata essere 2022. Quanto vale n ?

4. La terna

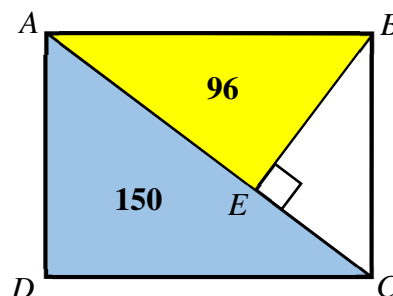
Di una terna ordinata di numeri reali $\{a, b, c\}$ si sa che $a^2 + 2b^2 = 100 + 2bc$ e che $2ab = 100 + c^2$. Qual è il valore più alto possibile per la somma $a + b + c$?

5. Senza cifra 1

Se si scrivono in ordine crescente (in notazione decimale) tutti i numeri interi positivi minori di 10.000 in cui non compare la cifra 1, qual è il numero che occupa la 2022-ma posizione?

6. Triangoli rettangoli

Con riferimento alla figura, $ABCD$ è un rettangolo, BE è perpendicolare alla diagonale AC e le aree dei triangoli ABE e ACD sono rispettivamente 96 e 150 m^2 . Qual è la lunghezza in metri di BC ?



7. Primi tra loro

Considerate l'insieme A dei numeri interi compresi tra 2 e 2022 inclusi. Si vuole essere sicuri che, estraendo n numeri a caso da A , fra questi n ve ne siano almeno due primi fra loro. Qual è il minimo valore possibile per n ?

8. L'ottaedro

I vertici di un ottaedro sono i centri delle facce di un cubo di volume 8640. Qual è il volume dell'ottaedro?

9. La somma

Di un numero a sapete che $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 3$. Quanto vale $a^6 + \frac{1}{a^6}$?

Nel caso in cui la risposta non fosse indipendente dai valori del parametro a rispondete 0000.

10. Coppie

Considerate i sottoinsiemi non vuoti di un insieme di 5 elementi e tutte le coppie di sottoinsiemi disgiunti che con essi si possono formare. Quante sono le coppie diverse?

11. Il pentagono

Le misure in gradi degli angoli interni di un pentagono convesso sono in progressione aritmetica. Qual è il numero centrale della progressione?

12. Differenza da 1/18

Per ogni k intero positivo da 1 in poi sia $a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. La somma $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ differisce da $\frac{1}{18}$ per $\frac{1}{n}$ con n intero positivo opportuno. Scrivete le ultime 4 cifre (migliaia, centinaia, decine, unità) di n .

13. Palindromi

Calcolate la somma di tutti i numeri interi positivi palindromi di tre cifre (dunque maggiori di 100), e scrivete le prime quattro cifre (da sinistra) del risultato che ottenete. (Un numero si dice *palindromo* se coincide con quello che si ottiene leggendo le sue cifre in ordine opposto, da destra a sinistra; ad esempio 454 è palindromo.)

14. Quanti triangoli?

All'interno di un poligono convesso avente 2022 vertici (e quindi lati) sono fissati 2022 punti. Se il poligono viene ripartito in triangoli aventi come vertici tre dei 4044 punti suddetti, senza che vi siano triangoli i cui interni si sovrappongono, quanti triangoli si ottengono?

15. In ordine crescente

Quanti sono i numeri interi compresi tra 10 e 1000 le cui cifre sono disposte in ordine crescente, ma non necessariamente strettamente crescente?



Kangourou della Matematica 2022

Coppa Junior a squadre

Finale 1

Cervia, 4 maggio 2022



Quesiti e soluzioni

1. Il referendum

In un paese è stato indetto un referendum, fra 252 votanti, in favore o contro la costruzione di una pista ciclabile. La percentuale dei voti a favore sui primi 240 voti scrutinati è rimasta identica sul totale quando sono stati scrutinati i rimanenti 12 voti, dei quali 7 erano a favore. Quanti sono risultati, alla fine, i voti favorevoli?

Risposta: 0147.

Sol. Se la percentuale è rimasta identica, è la stessa che si verifica sugli ultimi 12 voti: $7/12$. Quindi nei primi 240 voti i favorevoli erano 140.

2. Le balene

Due balene nuotano fianco a fianco in linea retta alla velocità di 6 km all'ora. A un certo istante una delle due accelera a 10 km all'ora, percorre un certo tratto quindi inverte la rotta e torna indietro, sempre a 10 km all'ora, fino a incontrare l'altra che invece ha proseguito sempre a 6 km all'ora. Se le balene si sono separate alle 9:15 e incontrate alle 11:00, a che ora la balena "veloce" ha invertito la rotta? (*Scrivi l'ora senza i due punti, ad esempio per le 9:15 scrivi 0915.*)

Risposta: 1039.

Sol. Rispetto alla lenta pensata ferma, la balena veloce all'andata andrebbe a 4 km/h e al ritorno a 16 km/h. Quindi per il ritorno le basterebbe $1/5$ del tempo totale e quindi per l'andata $7/5$ d'ora = 84 minuti.

3. Quanti vertici?

In corrispondenza di ciascuno dei vertici e nel centro di un poligono regolare di n lati (n pari) è stato scritto un numero intero positivo. Gli $n + 1$ numeri scritti sono stati scelti in modo che fossero tutti diversi tra loro e che, al variare delle coppie di vertici opposti (cioè allineati con il centro), la somma dei tre numeri allineati (nei due vertici e nel centro) fosse sempre la stessa e la minima possibile. Con questi presupposti tale somma è risultata essere 2022. Quanto vale n ?

Risposta: 2018.

Sol. Poiché la somma è la minima possibile, si può ipotizzare che i numeri scritti siano gli interi da 1 a $n + 1$. Ora occorre verificare che con essi la cosa sia fattibile. In effetti lo è: nel centro sia sistemato il numero 1 e, in una coppia diametrale, siano collocati i numeri 2 e $n + 1$ e poi, ruotando, in successione nelle coppie diametrali, i numeri 3 e n , 4 e $n - 1$ e così via, in modo che la somma sia sempre $n + 4$. È chiaro che ogni diversa scelta dei numeri e/o sistemazione (a meno di scambio di coppie diametrali) produrrebbe somme superiori.

4. La terna

Di una terna ordinata di numeri reali $\{a, b, c\}$ si sa che $a^2 + 2b^2 = 100 + 2bc$ e che $2ab = 100 + c^2$. Qual è il valore più alto possibile per la somma $a + b + c$?

Risposta: 0030.

Sol. Deve essere $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc = 0$ da cui $(a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$. Ne segue che deve essere $a = b = c$; allora da $a^2 = 100$ segue $a = \pm 10$.

5. Senza cifra 1

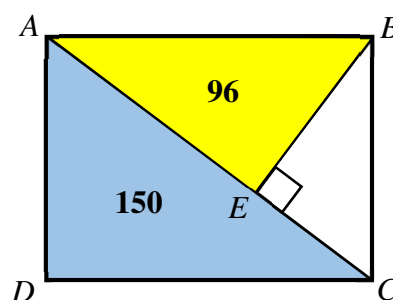
Se si scrivono in ordine crescente (in notazione decimale) tutti i numeri interi positivi minori di 10.000 in cui non compare la cifra 1, qual è il numero che occupa la 2022-ma posizione?

Risposta: 3797.

Sol. Se si scrivono in ordine crescente i numeri in base 9 utilizzando le cifre 0, 1, 2, ..., 8, è sufficiente alzare di 1 ogni cifra maggiore di 0 per ottenere quanto desiderato. 2022 in base 9 con le cifre indicate si scrive 2686.

6. Triangoli rettangoli

Con riferimento alla figura, $ABCD$ è un rettangolo, BE è perpendicolare alla diagonale AC e le aree dei triangoli ABE e ACD sono rispettivamente 96 e 150 m². Qual è la lunghezza in metri di BC ?



Risposta: 0015.

Sol. Il triangolo BCE ha area 54 ed è simile al triangolo ABE con rapporto 9/16 fra le aree rispettive, il che implica rapporto 3/4 fra i lati rispettivi. Allora $AB/BC = 4/3$ e quindi l'area, 300 m², di $ABCD$ è $4\overline{BC}^2/3$, da cui $\overline{BC}^2 = 9 \times 25$.

7. Primi tra loro

Considerate l'insieme A dei numeri interi compresi tra 2 e 2022 inclusi. Si vuole essere sicuri che, estraendo n numeri a caso da A , fra questi n ve ne siano almeno due primi fra loro. Qual è il minimo valore possibile per n ?

Risposta: 1012.

Sol. Poiché 1012 supera la metà di 2021, almeno due fra 1012 numeri estratti a caso devono essere consecutivi, dunque primi fra loro. D'altra parte tra tutti gli interi pari, che sono 1011, non ve ne sono due primi fra loro.

8. L'ottaedro

I vertici di un ottaedro sono i centri delle facce di un cubo di volume 8640. Qual è il volume dell'ottaedro?

Risposta: 1440.

Sol. Si suppongano cubo e ottaedro centrati nell'origine di un sistema di riferimento (con lati del cubo paralleli agli assi). Ognuna delle 8 piramidi a base triangolare contenute in un ottante in cui si scompone l'ottaedro ha area di base metà di quella della faccia del cubo corrispondente e quindi volume $1/6$ di quello del cubo.

9. La somma

Di un numero a sapete che $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 3$. Quanto vale $a^6 + \frac{1}{a^6}$?

Nel caso in cui la risposta non fosse indipendente dai valori del parametro a rispondete 0000.

Risposta: 0110.

Sol. Si ha $3 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$ e quindi $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$ ed elevando al quadrato $a^4 + \frac{1}{a^4} = 23$.

Ora

$$a^6 + \frac{1}{a^6} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a^4 + \frac{1}{a^4} - 1\right) = 5 \times 22 = 110$$

10. Coppie

Considerate i sottoinsiemi non vuoti di un insieme di 5 elementi e tutte le coppie di sottoinsiemi disgiunti che con essi si possono formare. Quante sono le coppie diverse?

Risposta: 0090.

Sol. Le coppie per cui almeno uno dei sottoinsiemi è un singleton sono $5 \times (2^4 - 1) - 10 = 65$ (nel primo addendo le 10 coppie di due singleton sono contate due volte). Le coppie per cui entrambi i sottoinsiemi sono costituiti da due elementi sono 15. Le coppie costituite da un sottoinsieme di due elementi e l'altro di tre sono 10.

Soluzione generalizzata a insiemi di n elementi. Ad ogni coppia ordinata $\{A, B\}$ di sottoinsiemi disgiunti di $\{1, 2, \dots, n\}$ (che rappresenta il nostro insieme) associamo una sequenza di n cifre che siano solo 0 o 1 o 2 secondo la regola seguente: al numero k associamo 1 se k sta in A , 2 se k sta in B , 0 se k non sta né in A né in B . Le sequenze sono complessivamente 3^n . Le sequenze corrispondenti ad A vuoto sono quelle a valori in $\{0, 2\}$, dunque sono 2^n ; altrettante sono quelle corrispondenti a B vuoto. In questo modo la sequenza corrispondente ad A e B entrambi vuoti è stata contata due volte. Allora le coppie ordinate di sottoinsiemi disgiunti sono complessivamente $3^n - 2^n - 2^n + 1$; levando la dipendenza dall'ordine il numero va dimezzato.

11. Il pentagono

Le misure in gradi degli angoli interni di un pentagono convesso sono in progressione aritmetica. Qual è il numero centrale della progressione?

Risposta: 0108. Sol. Essendo i 5 numeri in progressione aritmetica, quello centrale deve essere la media, cioè esattamente l'angolo del pentagono regolare.

12. Differenza da 1/18

Per ogni k intero positivo da 1 in poi sia $a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. La somma $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ differisce da $\frac{1}{18}$ per $\frac{1}{n}$ con n intero positivo opportuno. Scrivete le ultime 4 cifre (migliaia, centinaia, decine, unità) di n .

Risposta: 3318.

Sol. Da

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right)$$

sommando con procedimento telescopico segue che la somma cercata vale

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{101 \times 102 \times 103} \right) = \frac{1}{18} - \frac{1}{3 \times 101 \times 102 \times 103} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3.183.318}.$$

13. Palindromi

Calcolate la somma di tutti i numeri interi positivi palindromi di tre cifre (dunque maggiori di 100), e scrivete le prime quattro cifre (da sinistra) del risultato che ottenete. (Un numero si dice *palindromo* se coincide con quello che si ottiene leggendo le sue cifre in ordine opposto, da destra a sinistra; ad esempio 454 è palindromo.)

Risposta: 4950.

Sol. Se sommiamo ad ogni numero palindromo quello ottenuto facendo il complemento a 9 delle sue cifre otteniamo 999. Le coppie non ordinate di questo tipo sono 50, per cui la somma di tutti i loro elementi è 49.950. In questo calcolo sono stati inseriti anche i numeri non ammissibili del tipo $0k0$, dove k è una delle 10 cifre: la loro somma, che è 450, va sottratta

14. Quanti triangoli?

All'interno di un poligono convesso avente 2022 vertici (e quindi lati) sono fissati 2022 punti. Se il poligono viene ripartito in triangoli aventi come vertici tre dei 4044 punti suddetti, senza che vi siano triangoli i cui interni si sovrappongono, quanti triangoli si ottengono?

Risposta: 6064.

Sol. Sia x il numero dei triangoli: la somma delle misure in gradi dei loro angoli interni è $180 \times x$. Se i vertici del poligono sono n e i punti fissati all'interno sono m , il contributo complessivamente fornito a questa somma dai punti interni è $360 \times m$, mentre quello fornito dai vertici è $180 \times (n - 2)$. Si ottiene $x = 2 \times m + n - 2$.

15. In ordine crescente

Quanti sono i numeri interi compresi tra 10 e 1000 le cui cifre sono disposte in ordine crescente, ma non necessariamente strettamente crescente?

Risposta: 0210.

Sol. I numeri di tipo xx sono 9. I numeri di tipo xxx sono 9. I numeri di tipo xyx o xyy con $x < y$ sono quanti quelli di tipo xy con $x < y$, cioè 36 (combinazioni di 9 elementi di classe 2); tutti gli altri sono numeri scrivibili con 3 cifre distinte, di cui eventualmente una nulla, disposte in ordine crescente (combinazioni di 10 elementi di classe 3) e quindi sono 120.