Kangourou della Matematica 2022
finale nazionale italiana
Cervia, 24 settembre 2022

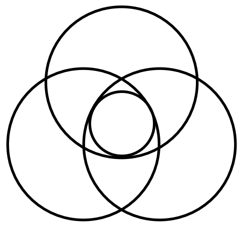
LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Considera la sequenza di interi i cui primi due termini sono, nell'ordine, 1007 e 10017 e ogni termine successivo è ottenuto dal precedente inserendo una ulteriore cifra 1 dopo le tre cifre iniziali 100 (dunque 1007, 10017, 100117, 1001117, …). Dimostra che ogni intero della sequenza è divisibile per 53.

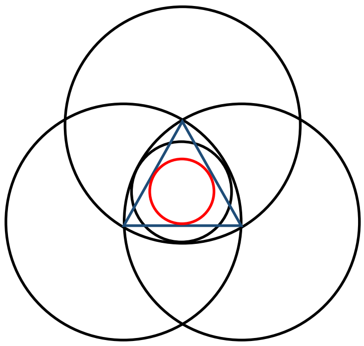
Svolgimento. 1007 è divisibile per 53. La differenza fra due termini consecutivi della sequenza è del tipo 901×10^k per qualche intero positivo k, e 901 è divisibile per 53.
Oppure: a_0 =1007 è divisibile per 53; inoltre : a_1 =10017 = 10070 – 53 = $10a_0$ – 53 e, per ogni altro termine della successione, $a_n = 100\underbrace{1 \ldots 1}_{n}7 = 10\, a_{n-1} - 53$.

J2. (*7 punti*) In figura vedi tre circonferenze di raggio 1, ognuna passante per il centro delle altre due, e una circonferenza più piccola contenuta in ciascuna delle tre e ad esse internamente tangente. Quanto vale il raggio di quest'ultima?



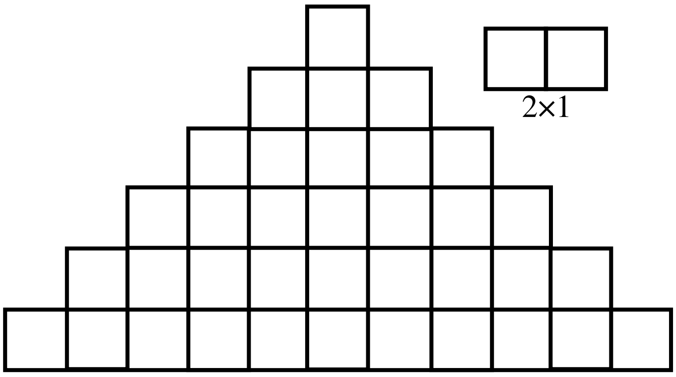
Risposta. $\mathbf{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ **.**

Svolgimento. I centri delle tre circonferenze di raggio 1 sono i vertici di un triangolo equilatero T di lato 1, dunque di altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Chiaramente (motivi di simmetria) il centro della circonferenza inscritta in T e quello della circonferenza che ci interessa coincidono: tale centro, come è noto, dista $\frac{2}{3}$ dell'altezza di T dai vertici di T.



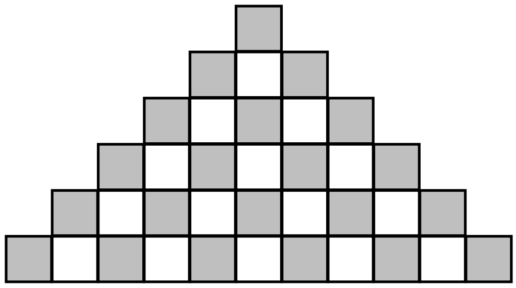
Allora il raggio cercato vale $1 - \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

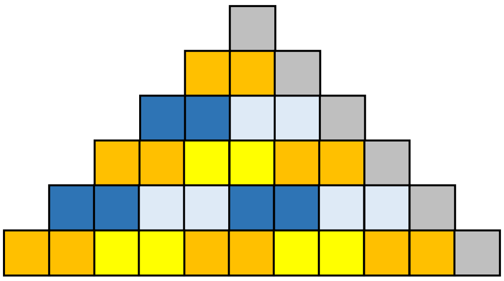
J3. (*11 punti*) In figura vedi una regione di piano ottenuta accostando 36 quadratini tutti uguali fra loro e una tessera ottenuta accostando due quadratini identici a quelli della regione. Quante tessere di questo tipo puoi disporre al massimo nella regione in modo che ognuna copra esattamente due quadratini della regione e non si sovrappongano (neppure parzialmente)? Puoi utilizzare la figura per indicare come disporre le tessere, ma ricorda che devi anche giustificare il motivo per il quale non ne puoi collocare un numero maggiore.



Risposta: 15.

Svolgimento. Immagina di colorare i quadratini della regione alternativamente di bianco e di nero, ad esempio partendo con il quadratino di vertice nero: i quadratini bianchi sarebbero 15, quelli neri 21. Poiché ogni tessera copre un quadratino bianco e uno nero (quadratini adiacenti in orizzontale o in verticale hanno colori diversi), non puoi inserire più di 15 tessere. Puoi inserirne 15, ad esempio come ti mostra la seconda figura.





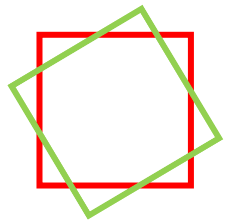
J4. (*14 punti*) Per quante coppie ordinate (m, n) di numeri interi positivi si ha

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2022}\ ?$$

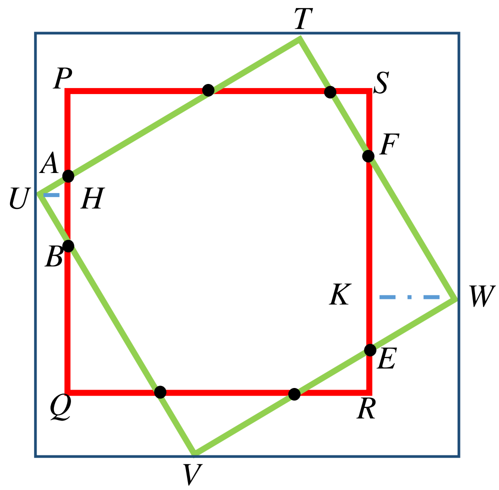
Risposta: 27.

Svolgimento. L'uguaglianza proposta equivale a $2022(m + n) = mn$, cioè $(m - 2022)(n - 2022) = 2022^2$. La fattorizzazione in primi di 2022^2 è $2^2 \times 3^2 \times 337^2$, dunque 2022^2 ammette 3^3 divisori diversi fra loro.

J5. (*18 punti*) Due quadrati congruenti, uno con bordo rosso e l'altro con bordo verde, sono disposti nel piano in modo tale che la loro intersezione sia un ottagono (i centri dei due quadrati possono non coincidere). Dimostra che la somma delle lunghezze dei lati rossi dell'ottagono coincide con la somma delle lunghezze dei lati verdi.



Svolgimento. Se i due quadrati sono concentrici l'affermazione è ovvia per simmetria. In caso contrario si può traslare uno dei due quadrati fino a che i due centri coincidano: per ognuno dei due colori, questa operazione non altera la somma delle lunghezze dei lati di quel colore poiché l'eventuale perdita di lunghezza di un lato è compensata esattamente dal guadagno sul lato opposto dell'ottagono, che è dello stesso colore: si pensi di operare la traslazione in due passi, ciascuno in una delle due direzioni individuate dal quadrato che si lascia fermo. Più esplicitamente si possono descrivere nel dettaglio gli effetti di queste traslazioni. La figura suggerisce che, per esempio, nel caso di traslazione del quadrato *TUVW* nella direzione *QR*, la somma delle lunghezze di *AB* ed *EF* rimane costante in quanto lo è la somma delle distanze *UH*+*WK* (differenza tra il lato del quadrato circoscritto a *TUVW* con lati paralleli a *PQRS* e il lato di quest'ultimo). Analogamente per la direzione *PQ*: quindi la somma delle lunghezze dei lati rossi è costante. In maniera analoga si vede che lo è la somma delle lunghezze dei lati verdi.



J6. (*22 punti*) Considera il numero 2023^{2022} in notazione decimale; leva la sua prima cifra da destra (quella delle unità) e sommala al numero ottenuto con le cifre rimaste. Procedi in questo modo fino ad ottenere un numero di 10 cifre. Dimostra che questo numero che hai ottenuto possiede almeno due cifre uguali.

Svolgimento. Il numero 2023^{2022} non è divisibile per 9 (2023 non è divisibile per 3). L'operazione suggerita, che va iterata, non altera modulo 9 la somma delle cifre del numero su cui la si esegue (facile da verificare: o rimane inalterata o diminuisce di 9; si pensi al calcolo del riporto nell'esecuzione dell'addizione). Allora anche il numero finale di 10 cifre non è divisibile per 9: le sue 10 cifre non possono dunque essere tutte diverse fra loro ($0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ è divisibile per 9).