Kangourou della Matematica 2022
finale nazionale italiana
Cervia, 24 settembre 2022

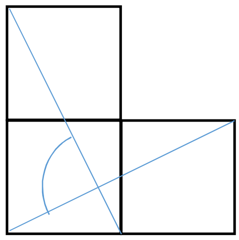
LIVELLO BENJAMIN

Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (*5 punti*) Un fiume è attraversato da un ponte A e da un ponte B e il fiume scorre da A verso B. Stefano entra nel fiume in corrispondenza del ponte A e si lascia trasportare passivamente dalla corrente fino al ponte B, che raggiunge in 6 minuti; poi dal ponte B, nuotando contro-corrente, raggiunge il ponte A, ancora in 6 minuti. Se Stefano nuotasse dal ponte A al ponte B consumando la stessa energia utilizzata nel suo tragitto contro-corrente, quanto impiegherebbe per raggiungere il ponte B partendo dal ponte A?

Risposta: 2 minuti.
Svolgimento. L'energia necessaria a rimanere fermi nel fiume è identica a quella che sarebbe necessaria per muoversi alla velocità della corrente se la corrente non ci fosse. Allora Stefano, con l'aiuto della corrente, si sposta ad una velocità che è tre volte quella della corrente.

B2. (*7 punti*) In figura appaiono accostati tre quadrati. Quanti gradi misura l'angolo evidenziato?



Risposta: 90.
Svolgimento. Ognuno dei due rettangoli formati dai due quadrati accostati in orizzontale e dai due accostati in verticale può essere ottenuto ruotando l'altro di 90°. Allora anche le corrispondenti diagonali sono ruotate di 90°.

B3. (*11 punti*) Claudio ha tentato di indovinare la classifica finale completa di un torneo di 8 squadre. Una volta terminato il torneo, ha scoperto di aver sbagliato la previsione per ciascuna delle 8 posizioni in classifica: tranne che alla squadra Azzurra, che lui aveva previsto che sarebbe arrivata ultima, a ognuna delle altre ha assegnato una posizione migliore di quella che poi la squadra ha ottenuto. A che posto si è piazzata la squadra Azzurra?

Risposta: al primo.
Svolgimento. La squadra che Claudio ha predetto sarebbe arrivata settima è necessariamente arrivata ottava; quella che ha predetto sarebbe arrivata sesta è allora necessariamente arrivata settima e così via fino a quella che secondo Claudio avrebbe dovuto vincere che dunque è arrivata seconda. Per la squadra Azzurra rimane solo il primo posto.

B4. (*14 punti*) 10 ciclisti terminano una gara con tempi di arrivo tutti diversi fra loro. Dopo qualche tempo, un giornalista chiede a ciascuno di loro di comunicargli il proprio ordine di arrivo in quella gara, ovviamente con un numero compreso fra 1 e 10. Il giornalista somma le risposte fornitegli ed ottiene 36. Ne deduce che certamente alcuni hanno mentito: quanti, almeno?

Risposta: 3.
Svolgimento. Se nessuno avesse mentito, la somma delle risposte sarebbe stata 55. Sommando addendi diversi non superiori a 10, l'unico modo di ottenere $55 - 36 = 19$ con due addendi è $10 + 9$. Se avessero mentito solo in due, dovrebbero essere allora gli ultimi due classificati, che avrebbero dovuto comunque dichiarare almeno 1: impossibile perché la somma dei primi 8 interi è proprio 36. Allora hanno mentito almeno in tre: ad esempio avrebbero potuto essere gli ultimi tre dichiarando 2, 3 e 3, addendi che sommati a 28 (la somma dei primi 7 interi) danno appunto 36.

B5. (*18 punti*) Dei triangoli ottenuti congiungendo tre vertici di uno stesso cubo, quanti sono equilateri?

Risposta: 8.
Svolgimento. Chiaramente non possono essere equilateri triangoli che abbiano fra i loro lati qualche spigolo del cubo. Resta allora l'unica possibilità che i lati siano diagonali di tre facce che condividano uno stesso vertice: ogni vertice individua una e una sola terna di tali facce e ogni terna uno e un solo triangolo equilatero.

B6. (*22 punti*) Per allenarsi, i 12 giocatori di una squadra di pallacanestro ogni giorno si ripartiscono in due squadre, ciascuna di 6 giocatori, che disputano una partita una contro l'altra. Qual è il minimo numero di partite che consente a ciascun giocatore di disputare almeno un incontro nella stessa squadra con ognuno degli altri?

Risposta: 3.
Svolgimento. È chiaro che due partite non bastano: ogni giocatore deve poter essere compagno di 11 giocatori diversi, e in due partite potrebbe esserlo solo di 10. Possiamo ripartire i giocatori a gruppi fissi di 3: il problema si può allora riesaminare pensando di avere 4 giocatori A, B, C, D e squadre da due. In questo caso è chiaro che tre partite sono sufficienti: basta considerare le coppie $\{A, B\}$ contro $\{C, D\}$, $\{A, C\}$ contro $\{B, D\}$ e $\{B, C\}$ contro $\{A, D\}$.