Kangourou della Matematica

Semifinale individuale

21 maggio 2021

STUDENT

Quesiti a risposta chiusa

1. (2 punti) Se delle seguenti tre affermazioni

- ***a)*** "Lisa ha più di 2021 euro"
- ***b)*** "Lisa ha meno di 2021 euro"
- ***c)*** "Lisa ha almeno 1 euro"

una e una sola è vera, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?

A) Lisa ha 2021 euro. **B)** Lisa non ha alcun euro. **C)** Lisa ha 1000 euro.
D) L'affermazione ***c)*** è falsa. **E)** L'affermazione ***c)*** è quella vera.

2. (3 punti) Giulio vuol scrivere 2021 come somma di cinque numeri interi positivi che non abbiano cifre diverse da 3 e da 5. Quante cifre 3 ci sono complessivamente nei cinque numeri?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

3. (3 punti) Considera l'insieme $S = \{1, 2, 3, ..., 29, 30\}$. Denota con K un sottoinsieme $\{a, b, c\}$ di tre elementi diversi di S. Quanti sottoinsiemi K di S sono tali che $a + b + c$ sia un quadrato perfetto, si abbia $b = a + 1$ e si abbia $c = b + 1$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

4. (4 punti) Denotiamo con A_n l'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze, inscritta e circoscritta a un poligono regolare di n lati, ciascuno di lunghezza 1.
Quanto vale la differenza $A_{2021} - A_{2020}$?

A) $\frac{\pi}{2021^2}$ **B)** $\frac{\pi}{2020^2}$ **C)** $\frac{\pi}{2021}$ **D)** $\frac{\pi}{2020}$ **E)** 0

5. (4 punti) Pietro ha arrotondato alle decine tutti i numeri interi positivi minori di 10000, poi ha arrotondato i numeri ottenuti alle centinaia e infine ha arrotondato gli ultimi risultati alle migliaia. Invece Paolo ha arrotondato direttamente alle migliaia tutti i numeri interi positivi minori di 10000. Per quanti dei numeri interi di partenza i due ragazzi ottengono risultati finali diversi? *L'arrotondamento va inteso nel senso usuale: ad esempio, per l'arrotondamento alle decine, 10 e 13 vengono arrotondati a 10, 15 e 17 a 20.*

A) 0 **B)** 55 **C)** 110 **D)** 550 **E)** 1100

6. **(4 punti)** Sapendo che, per una opportuna terna di numeri reali a, b, c, l'equazione

$$a(x^3 - 76)^8 + b(x^3 - 76)^4 + c = 0$$

ammette la soluzione $x = 5$, quale dei seguenti numeri sicuramente risolve la stessa equazione?

A) 125 **B)** – 5 **C)** – 4 **D)** 4 **E)** 3

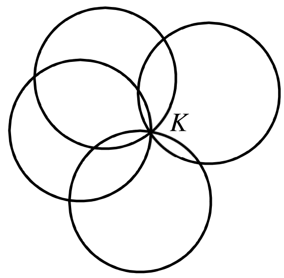
7. **(5 punti)** Usando strumenti di alta precisione, da un unico quadrato di 10 cm di lato si possono ritagliare alcuni cerchi tali che, sommati i loro diametri in centimetri, si ottenga

i) 20. ***j***) 15. ***h***) 10 π. ***k***) 2021.

Quale delle precedenti affermazioni è falsa?

A) La ***i***). **B)** La ***j***). **C)** La ***h***). **D)** La ***k***). **E)** Nessuna.

8. **(5 punti)** Quattro circonferenze distinte di raggio 1 passano tutte per un punto comune K, come mostra la figura. Quanto è lungo il bordo esterno della figura formata dall'unione dei quattro cerchi?



A) $\frac{3}{2}\pi$ **B)** 3π **C)** 4π **D)** 6π

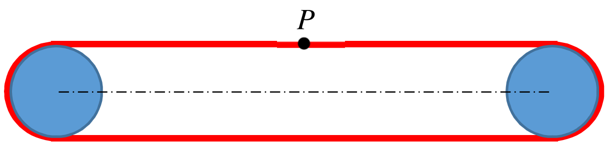
E) Dipende da come sono disposte le circonferenze.

9. **(6 punti)** Un rettangolo di dimensioni $1 \times L$ è ripartito in quattro rettangoli da due segmenti paralleli ciascuno a uno dei lati. Di questi quattro rettangoli, uno ha area almeno 2 e ognuno degli altri ha area almeno 1. Qual è il più piccolo valore possibile per L?

A) 5 **B)** 6 **C)** $3\sqrt{3} + 1$ **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** Un valore diverso dai precedenti

Quesiti a risposta aperta

10. **(4 punti)** La figura schematizza la fiancata di un mezzo cingolato le cui ruote hanno un raggio di $1/\pi$ metri con distanza dei centri di 3 metri. La parte inferiore del cingolo è a contatto con un terreno piano regolare e P denota il punto a metà della parte attualmente superiore del cingolo. Se il mezzo avanza di 20 centimetri, di quanti centimetri avanza, rispetto al terreno, il punto P?



11. **(5 punti)** Abbiamo 90 gettoni, metà dei quali neri e l'altra metà bianchi. Vogliamo allinearli in modo che i blocchi di gettoni bianchi consecutivi siano quanti più possibili e che nessuna coppia di questi blocchi abbia lo stesso numero di gettoni. Qual è il numero di gettoni nel blocco più grande possibile di gettoni neri consecutivi?

12. (5 punti) Utilizzando solo le cifre 0 e 1, Tommaso costruisce un allineamento di più di cinque cifre che inizia con 1001 e rispetta queste condizioni:

a) non ci sono due blocchi identici di cinque cifre consecutive, disgiunti o parzialmente sovrapponentisi;

b) l'allineamento termina quando non è possibile aggiungere alcuna delle due cifre senza violare la condizione ***a)***.

Quali sono le ultime quattro cifre dell'allineamento di Tommaso? *Scrivi 9999 se ritieni che non siano univocamente determinate.*

13. (6 punti) Se moltiplichi tra loro tutti i numeri interi positivi di 5 cifre non divisibili per 5 e dividi per 5 il risultato, che resto ottieni?

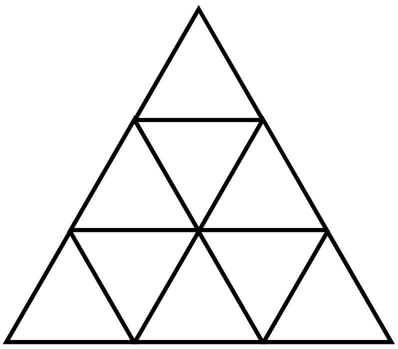
14. (6 punti) Abbiamo due bilance di precisione che forniscono il peso in grammi degli oggetti posti sui rispettivi piatti: le azzeriamo. Allineiamo 2021 oggetti in ordine di peso non crescente e collochiamo un oggetto alla volta, a partire dal primo, su una delle due bilance rispettando le seguenti regole:

- non si deve mai rimuovere da alcuna delle due bilance un oggetto posto in precedenza;
- ad ogni passo, se il peso indicato dalle due bilance è lo stesso si può collocare l'oggetto di turno su una qualunque delle due, altrimenti si deve collocarlo sulla bilancia che indica il peso minore.

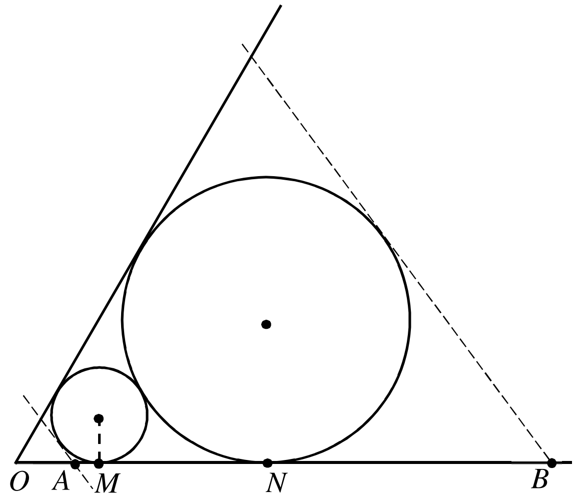
Se ogni oggetto pesa un numero intero (positivo) di grammi e il loro peso complessivo è di 4040 grammi, quando avremo collocato tutti i 2021 oggetti, qual è lo scarto maggiore che potrebbe presentarsi fra i due pesi indicati?

15. (6 punti) Quanti sono i numeri primi della forma $\frac{m^2+m+1}{n}$ dove m e n sono numeri interi positivi? (*Scrivi 9999 se ritieni che siano infiniti*).

16. (7 punti) Un triangolo equilatero di lato n è ripartito in triangoli equilateri di lato 1 secondo lo schema che ti suggerisce la figura, in cui è rappresentato il caso n = 3. Immagina che ogni triangolo piccolo rappresenti una stanza e che, in ogni suo muro condiviso con una stanza adiacente, ci sia una porta. Scegliendo opportunamente la stanza da cui partire, il massimo numero di stanze che possono essere visitate passando una sola volta da ogni stanza visitata è il più vicino possibile a 2021. Quanto vale n?



17. (7 punti) La figura mostra due circonferenze esternamente tangenti inserite in un angolo di 60° ed entrambe tangenti alle semirette che delimitano l'angolo: M e N sono i due punti di tangenza alla semiretta orizzontale. Le rette per A e per B sono parallele e tangenti rispettivamente alla circonferenza piccola e alla grande. Il raggio della circonferenza piccola è $\sqrt{12}$. Se AM è lungo 3 quanto è lungo AB?



18. (8 punti) Su una circonferenza sono disposti 98 numeri, ognuno uguale a 1 oppure a – 1 (senza escludere che siano tutti uguali tra loro). Vuoi conoscere il loro prodotto senza poterli vedere: allo scopo puoi chiedere, per quante terne vuoi, il prodotto dei numeri che formano una terna di numeri consecutivi (rispetto a come appaiono sulla circonferenza). Qual è il più piccolo numero di domande che ti basta porre?

Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	B	D	E	D	E	E	C	E	0040	0038	1001	0001	0000	9999	0045	0027	0098