Kangourou della Matematica 2021
finale nazionale italiana
Cervia, 25 settembre 2021

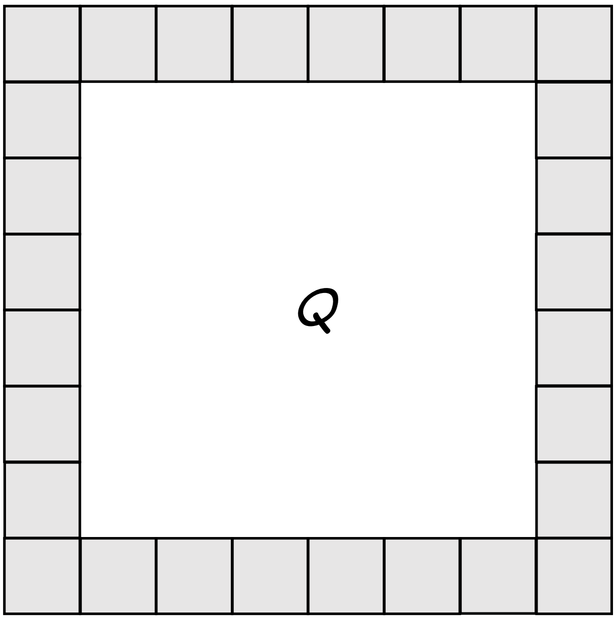
LIVELLO ECOLIER

Tutte le risposte devono essere giustificate

E1. (*5 punti*) In una cassetta ci sono 24 mele: alcune sono verdi e le rimanenti sono rosse. Ti hanno detto che, se ne prendi tre a caso, sicuramente almeno una è verde. Marco ne ha appena prese 3 e due di queste sono rosse. Quante mele verdi ci sono nella cassetta?

Risposta: 22.
Soluzione. Almeno 2 mele rosse ci sono; se ce ne fossero più di 2, in almeno un caso sarebbe possibile pescare 3 mele tutte rosse.

E2. (*7 punti*) Ho un quadrato *Q* di 6 cm di lato. Voglio ottenere un nuovo quadrato contornandolo con quadrati tutti uguali fra loro e voglio che i lati di questi quadrati misurino un numero intero di centimetri.
Quali possono essere le misure dei lati dei quadrati da usare come contorno? La figura ti mostra per esempio che cosa posso fare con quadrati di lato 1 cm.



Risposta: posso fare una cornice con quadrati di lato 1 cm, 2 cm, 3 cm, 6 cm.
Soluzione. È ovvio che le 4 misure elencate vanno bene; non ci sono altre possibilità poiché, nella cornice, quattro quadrati devono stare nei vertici del quadrato *Q* e quindi gli altri che sono aderenti ai lati di *Q* devono avere lati di lunghezza intera che divide la lunghezza 6 dei lati di *Q*.

E3. (*11 punti*) Le amebe sono protozoi che si riproducono in tre minuti, cioè ogni 3 minuti ogni ameba ne genera un'altra identica. Nessuna ameba muore finché ha spazio per riprodursi. Due recipienti di uguale capacità contengono inizialmente il primo un'ameba, il secondo 8 amebe. Il secondo recipiente si trova pieno di amebe dopo esattamente 3 ore. Quanti minuti impiega a riempirsi il primo recipiente?

Risposta: 189.
Soluzione. Il primo recipiente impiega 3 × 3 = 9 minuti a portarsi nella condizione iniziale del secondo.

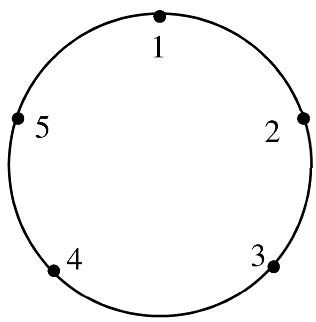
E4. (*14 punti*) L'uguaglianza 25 × 2 = 211 è falsa, ma la puoi trasformare in un'uguaglianza corretta aggiungendo 1 ad alcune sue cifre e togliendo 1 alle altre. Scrivi questa nuova uguaglianza corretta, motivando.

Risposta: 34 × 3 = 102.
Soluzione. Per aver un numero di tre cifre bisogna aumentare di 1 tanto le decine del fattore 25 che le unità del fattore 2.
35×3=105 mostra che bisogna anche diminuire di 1 le unità del fattore 25, diminuendo quindi di 1 le centinaia e le decine del risultato 211 e aumentando di 1 le unità sempre di 211: 34×3=102.

E5. (*18 punti*) Immagina di avere moltiplicato fra loro tutti i numeri interi pari compresi fra 1 e 101. Con quante cifre 0 termina il prodotto?

Risposta: 12.
Soluzione. Affinché le ultime n cifre di un numero siano 0 occorre e basta che il numero sia divisibile n volte per 10. I fattori 10, 20, ..., 50, ... , 90, 100 garantiscono che il prodotto è divisibile 12 volte per 10: infatti 50 e 100 sono divisibili due volte per 5, gli altri una volta sola e vi sono fattori 2 in abbondanza. Non può essere divisibile più di 12 volte, perché quelli elencati sono gli unici fattori divisibili per 5 del prodotto in questione.

E6. (*22 punti*) In figura vedi i numeri da 1 a 5 disposti in senso orario su una circonferenza. Puoi modificarli quante volte vuoi, ma ogni volta solo aggiungendo 1 a due numeri che si trovino in posizioni adiacenti (per es. puoi aggiungere 1 a 5 e 1, facendoli dunque diventare 6 e 2; successivamente a 2 e 2 facendoli diventare 3 e 3). Spiega come è possibile, rispettando questa regola, arrivare ad avere cinque numeri tutti uguali.



Soluzione. Si possono trasformare in {5,6} sia la coppia {1,2}, con quattro passaggi, sia la coppia {3,4}, con due. A questo punto la disposizione è 5, 5, 6, 5, 6 che può diventare 6, 6, 6, 6, 7; da questa disposizione tutti i numeri 6 possono essere portati a 7.