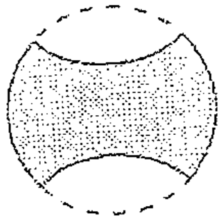
Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

LIVELLO BENJAMIN

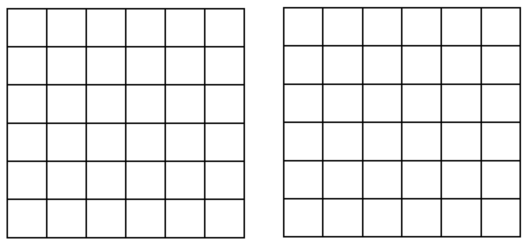
<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

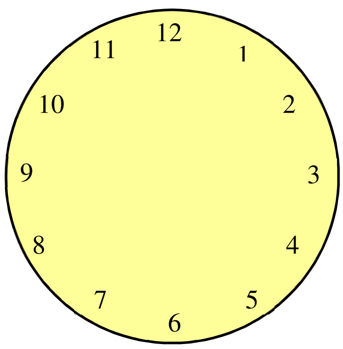
B1. (*5 punti*) Luisa ha molte penne: 29 rosse, 13 blu e 20 nere. Vuole confezionare dei sacchetti contenenti ciascuno 4 penne, in modo che nessun sacchetto contenga più di due penne dello stesso colore. Quanti sacchetti può confezionare al massimo?

B2. (*7 punti*) I quattro archi che delimitano la regione ombreggiata hanno tutti la stessa lunghezza, uguale alla lunghezza dei due archi tratteggiati. Questa lunghezza è un quarto della lunghezza di una circonferenza di raggio 1 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area della regione ombreggiata?



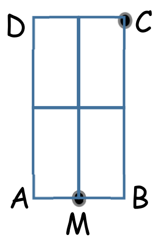
B3. (*11 punti*) Qui a lato vedi due griglie quadrate di 6 righe e 6 colonne ciascuna: puoi riempirle in molti modi diversi inserendo, uno per ogni casella, tutti i numeri interi da 1 a 36. Se, dopo aver riempito la griglia, accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e contemporaneamente il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, dirai che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui hai riempito la griglia. Riempi la prima griglia in modo che ci sia almeno un numero in posizione speciale e la seconda in modo che non ci siano numeri in posizione speciale.
Basta che tu riempia le griglie (cerchiando nella prima il numero in posizione speciale), non sono richieste spiegazioni.





B4. (*14 punti*) Sulla torta di compleanno di Rita sono disposte in modo regolare 12 candeline, ciascuna denotata con il suo numero (come se fossero le ore su un orologio, come suggerito dalla figura). Rita fa due tagli rettilinei distinti, che attraversano la torta completamente, e la suddividono in alcune porzioni. Se ogni candelina sta su una sola porzione e le somme dei numeri sulle candeline di ciascuna porzione sono tutte uguali, qual è la somma dei numeri delle candeline su ciascuna porzione?

B5. (*18 punti*) In figura vedi un rettangolo ABCD di lati 12 mm e 24 mm in cui una mediana interseca in M il lato AB. Devo andare da C a M toccando il segmento AD in un punto P: se voglio percorrere il tragitto più breve possibile, quanti millimetri deve distare P da A?



B6. (*22 punti*) Sia n il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di n?

Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

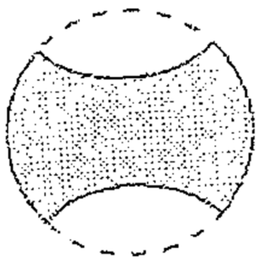
LIVELLO BENJAMIN

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

B1. (*5 punti*) Luisa ha molte penne: 29 rosse, 13 blu e 20 nere. Vuole confezionare dei sacchetti contenenti ciascuno 4 penne, in modo che nessun sacchetto contenga più di due penne dello stesso colore. Quanti sacchetti può confezionare al massimo?

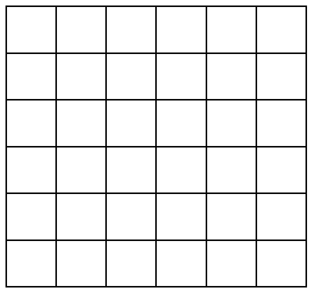
Risposta: 15.
Soluzione. In tutto Luisa ha 62 penne, quindi sicuramente non può confezionare più di 15 sacchetti da 4 penne; di fatto ne può confezionare esattamente 15: 11 del tipo RRBN; 3 del tipo RRNN e uno del tipo BBNN usando così 28 R, 19N e 13B.

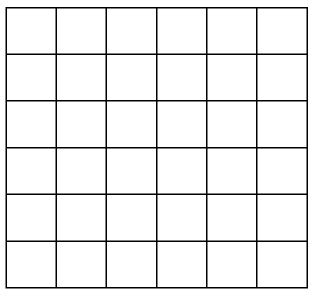
B2. (*7 punti*) I quattro archi che delimitano la regione ombreggiata hanno tutti la stessa lunghezza, uguale alla lunghezza dei due archi tratteggiati. Questa lunghezza è un quarto della lunghezza di una circonferenza di raggio 1 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area della regione ombreggiata?



Risposta: 2
Soluzione. I "vertici" della regione sono i vertici di un quadrato di diagonale 2 e di area evidentemente uguale a quella della regione.

B3. (*11 punti*) Qui a lato vedi due griglie quadrate di 6 righe e 6 colonne ciascuna: puoi riempirle in molti modi diversi inserendo, uno per ogni casella, tutti i numeri interi da 1 a 36. Se, dopo aver riempito la griglia, accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e contemporaneamente il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, dirai che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui hai riempito la griglia.
Riempi la prima griglia (in alto) in modo che ci sia almeno un numero in posizione speciale e la seconda in modo che non ci siano numeri in posizione speciale.





Basta che tu riempia le griglie (cerchiando nella prima il numero in posizione speciale), non sono richieste spiegazioni.

Soluzione proposta:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

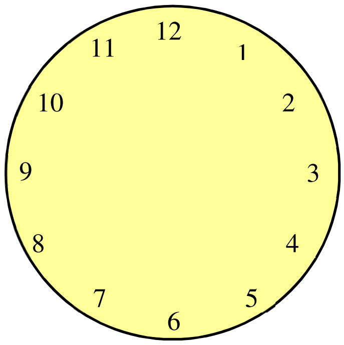
griglia 1

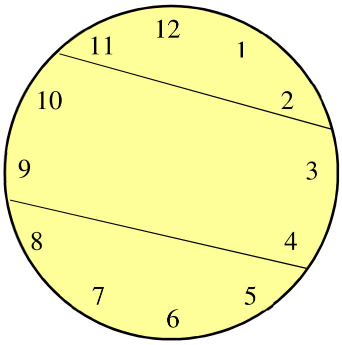
1	2	3	4	5	12
7	8	9	10	11	6
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

griglia 2

È chiaro che 6 è in posizione speciale nella griglia 1, poiché è il maggiore della prima riga e il minore dell'ultima colonna; la griglia 2 – ottenuta dalla 1 scambiando l'ultimo numero della seconda riga con l'ultimo della prima – non ha numeri in posizione speciale poiché il più grande per riga si trova sempre sull'ultima colonna tranne per la seconda riga in cui è sulla quinta e il minimo della quinta colonna non è 11 e quello dell'ultima, 6, non coincide con alcun massimo.

B4. (*14 punti*) Sulla torta di compleanno di Rita sono disposte in modo regolare 12 candeline, ciascuna denotata con il suo numero (come se fossero le ore su un orologio, come suggerito dalla figura). Rita fa due tagli rettilinei distinti, che attraversano la torta completamente, e la suddividono in alcune porzioni. Se ogni candelina sta su una sola porzione e le somme dei numeri sulle candeline di ciascuna porzione sono tutte uguali, qual è la somma dei numeri delle candeline su ciascuna porzione?

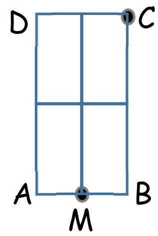




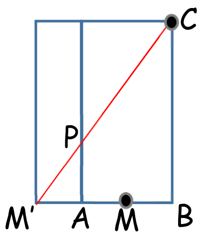
Risposta: 26.

Soluzione. La somma di tutti i numeri sulle candeline è 6×13=78. Con due tagli distinti si possono realizzare tre o quattro fette. Visto che 78 non è divisibile per 4, le fette non possono essere 4; possono essere 3 (e quindi la somma dei numeri delle candeline è 26) come mostra la partizione in figura.

B5. (*18 punti*) In figura vedi un rettangolo ABCD di lati 12 mm e 24 mm in cui una mediana interseca in M il lato AB. Devo andare da C a M toccando il segmento AD in un punto P: se voglio percorrere il tragitto più breve possibile, quanti millimetri deve distare P da A?



Risposta: 8 mm.



Soluzione. Disegno il simmetrico M' di M rispetto ad AD: ogni tragitto tra C e M che tocchi AD in un punto P ha la stessa lunghezza del tragitto CP+PM'; questo è minimo quando P appartiene al segmento CM'. Disegno questo segmento e trovo che P dista 8 da A, poiché i due triangoli BCM' e APM sono simili e M'B=3M'A (o per i più piccoli: perché posso disegnare 9 triangoli rettangoli uguali a APM' internamente a BCM').

B6. (*22 punti*) Sia n il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di n?

Risposta: 9.

Soluzione. Per essere il più piccolo possibile, il numero $m = 7 \times n$ deve avere la forma $m = 10\ldots0A$ dove le cifre a destra di 1, in numero di 2020, sono tutte 0 salvo al più A. Nel quoziente $m/7$ il blocco di sei cifre 142857, corrispondente ai resti 3, 2, 6, 4, 5, 1, compare inizialmente 336 (= 2016/6) volte, lasciando come ultima parte della divisione $1000A/7$: è dunque seguito, se per A si sceglie 3 in modo da ottenere resto 0, da 1429.