Kangourou della Matematica 2019
finale nazionale italiana
Cervia, 28 settembre 2019

LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Bruno e Carlo praticano tre sport: calcio, pallavolo e nuoto, non più di uno al giorno. Un giorno di calcio deve essere seguito da due giorni di riposo, un giorno di pallavolo da un giorno di riposo, un giorno di nuoto non richiede giorni di riposo e può sostituire un giorno di riposo. Ciascuno ha un programma di allenamento che si ripete periodicamente: in ogni periodo ognuno pratica ogni sport lo stesso numero di volte e l'intervallo minimo di tempo che trascorre tra due volte consecutive in cui uno di loro pratica uno stesso sport è lo stesso per tutti gli sport. Inoltre il programma prevede che i giorni di riposo siano ridotti al minimo possibile. Bruno e Carlo hanno iniziato ciascuno il proprio programma lo stesso giorno. Oggi stanno praticando sport diversi e vorrebbero andare a divertirsi nel primo giorno che sia di riposo per entrambi. Possono essere certi di riuscire nel loro intento?

S2. (*7 punti*) Di una piramide a base rettangolare sono note le lunghezze di tre dei quattro spigoli obliqui che ne congiungono il vertice *V* con i vertici *A*, *B*, *C*, *D* della base: $\overline{VA}$ = 90 m; $\overline{VB}$= 70 m; $\overline{VC}$ = 20 m. È possibile determinare la lunghezza dello spigolo *VD*? In caso affermativo determina tale lunghezza, in caso negativo individua le misure di due piramidi che rispettino i dati del problema in cui la lunghezza dello spigolo *VD* sia diverso.

S3. (*11 punti*) In un certo giorno di un certo mese di uno dei prossimi 10 anni ci sarà la luna piena. Se il ciclo lunare fosse composto da esattamente 28 giorni, dopo quanti anni al massimo ci sarebbe di nuovo la luna piena per la prima volta nello stesso giorno dello stesso mese? (Se, ad esempio, accadesse l'anno successivo, dovresti rispondere: dopo 1 anno.)

S4. (*14 punti*) Indicare un criterio che permetta di appurare velocemente, con il solo uso di carta e penna, quando il numero $5^a + 4^b + 3^c$, al variare di *a*, *b* e *c* fra gli interi non negativi, sia divisibile per 11.

S5. (*18 punti*) *ABC* è un triangolo acutangolo di ortocentro *H*, con il lato *AB* più lungo del lato *AC*; denota con *E* il punto simmetrico di *C* rispetto all'altezza condotta da *A* e con *F* l'intersezione della retta passante per *E* e *H* con la retta passante per *A* e *C*. Sulla base di questi soli dati fornisci una localizzazione (rispetto agli elementi dati dal problema) del circocentro del triangolo *AEF*.

S6. (*22 punti*) Considera la seguente affermazione con successiva dimostrazione. Il tutto ti convince? Giustifica la tua risposta.

> **AFFERMAZIONE** *Non è possibile pavimentare l'interno di un cerchio con ettagoni convessi (non ridotti ad un punto) in modo che ogni vertice di ogni ettagono appartenga esattamente a tre ettagoni ("pavimentare" significa ricoprire la figura in modo che ogni punto che cade nell'interno di una piastrella appartenga solo ad essa).*
>
> **Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che sia (teoricamente) possibile. Gli angoli interni di ogni ettagono misurerebbero in media 5 × 180/7 gradi; d'altra parte, in ogni vertice confluirebbero tre ettagoni, dunque la misura media degli angoli in un vertice sarebbe 2 × 180/3 ≠ 5 × 180/7.

Kangourou della Matematica 2019
finale nazionale italiana
Cervia, 28 settembre 2019

LIVELLO STUDENT

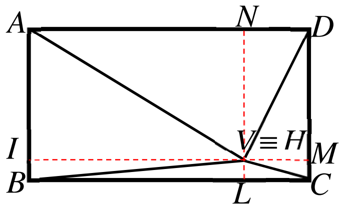
<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

S1. (*5 punti*) Bruno e Carlo praticano tre sport: calcio, pallavolo e nuoto, non più di uno al giorno. Un giorno di calcio deve essere seguito da due giorni di riposo, un giorno di pallavolo da un giorno di riposo, un giorno di nuoto non richiede giorni di riposo e può sostituire un giorno di riposo. Ciascuno ha un programma di allenamento che si ripete periodicamente: in ogni periodo ognuno pratica ogni sport lo stesso numero di volte e l'intervallo minimo di tempo che trascorre tra due volte consecutive in cui uno di loro pratica uno stesso sport è lo stesso per tutti gli sport. Inoltre il programma prevede che i giorni di riposo siano ridotti al minimo possibile. Bruno e Carlo hanno iniziato ciascuno il proprio programma lo stesso giorno. Oggi stanno praticando sport diversi e vorrebbero andare a divertirsi nel primo giorno che sia di riposo per entrambi. Possono essere certi di riuscire nel loro intento?

Risposta: non ne hanno la certezza.
Soluzione. È ovvio che la lunghezza del periodo di allenamento non può essere inferiore a 5 giorni. Posto C = calcio, R = riposo, N = nuoto, P = pallavolo, non riuscirebbero se, ad esempio, con inizio da oggi per entrambi, i due programmi fossero P R C R N e C N R P R.

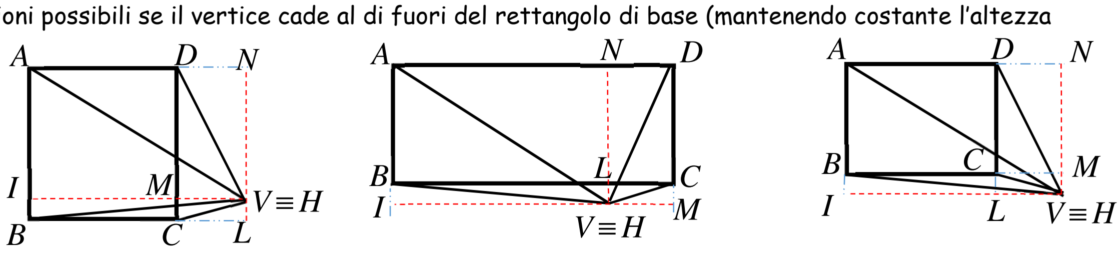
S2. (*7 punti*) Di una piramide a base rettangolare sono note le lunghezze di tre dei quattro spigoli obliqui che ne congiungono il vertice *V* con i vertici *A*, *B*, *C*, *D* della base: $\overline{VA}$ = 90 m; $\overline{VB}$= 70 m; $\overline{VC}$ = 20 m. È possibile determinare la lunghezza dello spigolo *VD*? In caso affermativo determina tale lunghezza, in caso negativo individua le misure di due piramidi che rispettino i dati del problema in cui la lunghezza dello spigolo *VD* sia diverso.

Risposta: è possibile e misura 60 m.



Soluzione. Per fissare le idee supponiamo che la proiezione ortogonale *H* del vertice *V* sulla base *ABCD* cada internamente alla base stessa: in caso contrario la dimostrazione e i calcoli sono analoghi [(1)]. In figura è rappresentato il rettangolo di base della piramide su cui sono stati proiettati ortogonalmente il vertice *V* e gli spigoli obliqui della piramide; *V* coincide quindi, in figura, con *H*; *I*, *L*, *M* e *N* sono invece i piedi delle altezze delle facce. È noto che il segmento *IM* (intersezione della base della piramide con il piano passante per *V* e perpendicolare al lato *AB*) contiene *H* ed è parallelo a *BC* e quindi sono congruenti le terne di segmenti *AN*, *IH* e *BL* e *ND*, *HM*, *LC*. Similmente il segmento *LN* contiene *H* ed è parallelo a *AB* e quindi sono congruenti le terne di segmenti *AI*, *NH* e *DM* e *IB*, *HL*, *MC*. La lunghezza di ogni spigolo obliquo può essere determinata applicando due volte il teorema di Pitagora, ad esempio:

[(1)] Altre configurazioni possibili se il vertice cade al di fuori del rettangolo di base (mantenendo costante l'altezza della piramide):



$$\overline{VA}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2.$$

L'altezza *VH* della piramide è l'altezza di ciascuno dei quattro triangoli rettangoli che hanno per ipotenusa uno spigolo obliquo e per vertice opposto *H*; le proiezioni degli spigoli sui lati della base sono a coppie coincidenti e quindi

$$\overline{VA}^2 + \overline{VC}^2 = \overline{VB}^2 + \overline{VD}^2,$$

dunque $\overline{VD}^2 = 90^2 + 20^2 - 70^2 = 3600$.

Tenendo conto che $\overline{VD}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{LC}^2) + \overline{VH}^2$, per ottenere che $\overline{VD}^2 = \overline{VA}^2 + \overline{VC}^2 - \overline{VB}^2$, <u>in alternativa</u> all'osservazione sulla coincidenza delle proiezioni degli spigoli, si può sommare la prima e la terza e sottrarre la seconda delle seguenti formule:

$$\overline{VA}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2$$
$$\overline{VB}^2 = (\overline{IB}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2$$
$$\overline{VC}^2 = (\overline{IB}^2+\overline{LC}^2) + \overline{VH}^2.$$

S3. (*11 punti*) In un certo giorno di un certo mese di uno dei prossimi 10 anni ci sarà la luna piena. Se il ciclo lunare fosse composto da esattamente 28 giorni, dopo quanti anni al massimo ci sarebbe di nuovo la luna piena per la prima volta nello stesso giorno dello stesso mese? (Se, ad esempio, accadesse l'anno successivo, dovresti rispondere: dopo 1 anno.)

Risposta: 248.

Soluzione. Bisogna far trascorrere un numero di anni sufficiente ad accumulare un multiplo intero (positivo) di 28 giorni. In ogni anno di 365 giorni vi sono 13 mesi lunari di 28 giorni e avanza un giorno; nel caso di anno bisestile avanzano 2 giorni: ogni quattro anni avanzano quindi cinque giorni, posto che uno dei quattro anni sia bisestile (cosa che succede sempre tranne quando l'anno multiplo di 4 è un multiplo di 100 ma non di 400). La situazione peggiore [(2)] si presenta quando l'anno è bisestile (nel periodo contemplato dal quesito, gli anni 2020, 2024 o 2028) e il giorno in esame è il 29 febbraio: in questo caso infatti bisogna anche far trascorrere un numero di anni tale da permettere di rientrare in un anno bisestile.

Poiché 4 e 5 sono coprimi, se tutti gli anni multipli di 4 fossero bisestili, questo significherebbe far passare 28×4 = 112 anni (e in ogni bisestile diverso dal 28-esimo avanzerebbe, modulo 28, un differente numero di giorni compreso tra 1 e 27). Ma, partendo dagli anni contemplati dal quesito (2020, 2024, 2028, tutti successivi al 1988), entro i 112 anni si trova anche 2100 che non è bisestile. Allora, dopo 112 anni mancherebbe un giorno a completare il mese lunare; dopo altri 112 ne mancherebbero 2 (poiché tra questi anni compare il 2200); quindi perché il 29 febbraio ci sia la luna piena occorre e basta aggiungere i 30 giorni che si accumulano nei successivi 6 × 4 = 24 anni (contenenti 6 bisestili): in tutto 248 anni [(3)].

---

(2) Purché nell'insieme degli anni che devono trascorrere non si presenti un anno multiplo di 4 non bisestile, se il giorno in esame è compreso tra il 1/3 e il 31/12 possono presentarsi 4 situazioni di periodicità a seconda che sia bisestile

1) l'anno *N* in esame: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+1+1+2,
2) l'anno *N* + 1: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 2+1+1+1,
3) l'anno *N* + 2: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+2+1+1,
4) l'anno *N* + 3: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+1+2+1.

Dopo i primi 20 anni necessari per aggiungere 25 giorni, bastano altri 3 anni nel primo caso e solo altri 2 nel secondo e nel terzo caso per aggiungere un mese lunare; invece, nel quarto caso 22 anni aggiungono solo 27 giorni e 23 ne aggiungono 29: per aggiungere 28+28=56=55+1 giorni, basta far passare 44 + 1 = 45 anni. Se invece il giorno in esame è compreso tra il 1/1 e il 28/2, gli schemi sono gli stessi ma slittati (2→1, 3→2, 4→3, 1→4). In ogni caso non si arriva mai a 2100.

(3) Più in generale si può notare che il più lungo intervallo di tempo minimo dopo il quale si ripresenta una certa fase lunare il 29 febbraio è sempre non maggiore di 248 anni. Dato che il periodo minimo con cui si ripresenta la sequenza di anni bisestili è di 400 anni basta verificare che cosa succede ad esempio negli anni da 2000 compreso a 2400 escluso (*prosegue a pagina successiva*).

S4. (*14 punti*) Indicare un criterio che permetta di appurare velocemente, con il solo uso di carta e penna, quando il numero $5^a + 4^b + 3^c$, al variare di a, b e c fra gli interi non negativi, sia divisibile per 11.

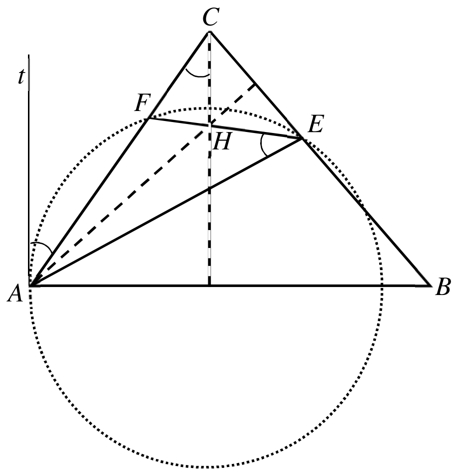
Soluzione. I resti della divisione per 11 di 5^k, partendo da $k = 0$, forniscono la successione di periodo $A = \{1, 5, 3, 4, 9\}$ lungo 5; quelli della divisione per 11 di 4^k, partendo da $k = 0$, forniscono la successione di periodo $B = \{1, 4, 5, 9, 3\}$ sempre lungo 5; quelli della divisione per 11 di 3^k, partendo da $k = 0$, forniscono la successione di periodo $C = \{1, 3, 9, 5, 4\}$ anch'esso lungo 5. Le terne (a, b, c) ammissibili sono dunque quelle tali che, sostituendo

a 5^a il numero α di posto $1+a$ mod. 5 in A,
a 4^b il numero β di posto $1+b$ mod. 5 in B,
a 3^c il numero γ di posto $1+c$ mod. 5 in C,

la somma $\alpha + \beta + \gamma$ sia divisibile per 11.

S5. (*18 punti*) *ABC* è un triangolo acutangolo di ortocentro *H*, con il lato *AB* più lungo del lato *AC*; denota con *E* il punto simmetrico di *C* rispetto all'altezza condotta da *A* e con *F* l'intersezione della retta passante per *E* e *H* con la retta passante per *A* e *C*. Sulla base di questi soli dati fornisci una localizzazione (rispetto agli elementi dati dal problema) del circocentro del triangolo *AEF*.

Risposta. Il circocentro appartiene alla semiretta uscente da *A* e passante per *B* (4).



Soluzione. È chiaro che, per motivi di simmetria, *E* appartiene alla retta passante per *B* e *C*, anzi proprio al segmento *BC* (poiché il lato *AC* è più corto del lato *AB*) e l'angolo *AEF* è congruente all'angolo *HCA*. Inoltre *AEF* è congruente all'angolo formato da *AC* con la retta *t* tangente in *A* alla circonferenza circoscritta al triangolo *AEF*, poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco *AF*. Quindi l'altezza *CH* relativa al lato *AB* è parallela alla retta *t* e quindi la semiretta uscente da *A* e passante per *B* essendo perpendicolare a *t* nel punto di tangenza *A*, contiene un diametro della circonferenza circoscritta al triangolo *AEF* e quindi il suo centro.

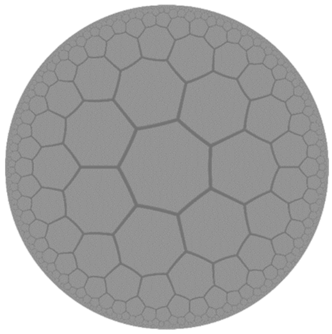
- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ o $2100 + 4K$ o $2200 + 4K$ con $8 < K < 25$ dopo **68 anni** si ripete la situazione di partenza: infatti nei 17 quadrienni in esame uno contiene un anno multiplo di 4 non bisestile e $5 \times 16 + 4 = 84 = 4 \times 28$.
- Se l'anno di partenza ha la forma $2300 + 4K$ con $0 \le K < 22$ la situazione si ripete dopo **112** anni, dato che l'intervallo contiene 2400 (che è bisestile) ma non 2500; se ha la stessa forma ma $22 \le K < 25$ devono passare **180 anni**, poiché dopo 112 anni avanza un giorno (visto che l'intervallo contiene 2500) e per compensarlo servono gli altri 27 giorni che si accumulano nei successivi 44 anni (tutti bisestili visto che $2480 + 4K < 2600$).
- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ con $0 \le K < 5$, dopo 68 anni non si supera 2100 e quindi avanza un giorno, ma dopo altri 112 anni tale giorno viene perso in quanto si perde un bisestile (uno solo poiché, se $K < 5$, $2180 + 4K < 2200$) e quindi servono in tutto **180 anni**. Analogamente per anni della forma $2100 + 4K$, $2200 + 4K$ con $0 \le K < 5$.
- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ o $2100 + 4K$ con $5 \le K \le 8$, valgono le considerazioni fatte nella soluzione del quesito e quindi servono **248 anni**. Invece se ha la forma $2200 + 4K$ con $5 \le K \le 8$ bastano **180 anni** poiché dopo 68 anni avanza un giorno che viene che viene recuperato nei restanti 112 anni che comprendono il 2300 non bisestile e il bisestile 2400.

(4) Localizzazioni più fini sono possibili. In particolare è possibile accertare che il circocentro deve trovarsi all'interno di *AB*, tra *A* e il punto medio *M* di *AB*. È anche possibile dimostrare che, per ogni punto interno ad *AM*, esiste almeno un triangolo *ABC* che lo vede come circocentro di *AEF*.
La valutazione della prova dipenderà dalla finezza della localizzazione proposta.

S6. (*22 punti*) Considera la seguente affermazione con successiva dimostrazione. Il tutto ti convince? Giustifica la tua risposta.

> **AFFERMAZIONE** *Non è possibile pavimentare l'interno di un cerchio con ettagoni convessi (non ridotti ad un punto) in modo che ogni vertice di ogni ettagono appartenga esattamente a tre ettagoni ("pavimentare" significa ricoprire la figura in modo che ogni punto che cade nell'interno di una piastrella appartenga solo ad essa).*
>
> **Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che sia (teoricamente) possibile. Gli angoli interni di ogni ettagono misurerebbero in media 5 × 180/7 gradi; d'altra parte, in ogni vertice confluirebbero tre ettagoni, dunque la misura media degli angoli in un vertice sarebbe 2 × 180/3 ≠ 5 × 180/7.

Soluzione. La dimostrazione è scorretta in quanto gli ettagoni impiegati devono essere necessariamente infiniti e non si è precisato che cosa si intenda per media di un'infinità di valori. È invece chiaro come può essere definita la media di infiniti valori ordinati in una successione (qualora sia possibile attuare questo ordinamento, come nel nostro caso in cui i valori sono gli angoli degli ettagoni che coprono la figura): la media sarà il valore a cui si attesta la (cioè il limite della) la somma dei primi *n* termini della successione divisa per *n*. Questo valore, in generale, non dipende solo dall'insieme degli infiniti valori a disposizione, ma anche dall'ordinamento che si è scelto per essi: ad es., posto $a \neq b$, per la successione *a*, *b*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, ... (in cui il numero di *a* tra due *b* consecutivi aumenta esponenzialmente) la media è *a*, mentre scambiando *a* con *b* la media è *b*.



In effetti, pavimentazioni come quella in oggetto sono (teoricamente) possibili: ecco il suggerimento per una di esse.