Kangourou della Matematica 2019
finale nazionale italiana
Cervia, 28 settembre 2019

LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Gianni ed Elvira giocano in questo modo. Ci sono 66 gettoni sul tavolo: ad ogni turno ognuno di essi può prendere 1 o 2 o 3 o 4 o 5 gettoni. Chi è costretto a prendere l'ultimo gettone perde. Elvira, che vuole vincere, vuole a tutti i costi essere lei ad iniziare. Perché?

J2. (*7 punti*) In ogni vertice di un quadrato è stato scritto un intero positivo. Se due vertici sono adiacenti, uno dei due interi corrispondenti divide l'altro; se due vertici sono opposti, nessuno dei due interi corrispondenti divide l'altro. Qual è il più piccolo valore possibile per la somma di questi quattro interi?

J3. (*11 punti*) Bruno e Carlo praticano tre sport: calcio, pallavolo e nuoto, non più di uno al giorno. Un giorno di calcio deve essere seguito da due giorni di riposo, un giorno di pallavolo da un giorno di riposo, un giorno di nuoto non richiede giorni di riposo e può sostituire un giorno di riposo. Ciascuno ha un programma di allenamento che si ripete periodicamente: in ogni periodo ognuno pratica ogni sport lo stesso numero di volte e l'intervallo minimo di tempo che trascorre tra due volte consecutive in cui uno di loro pratica uno stesso sport è lo stesso per tutti gli sport. Inoltre il programma prevede che i giorni di riposo siano ridotti al minimo possibile. Bruno e Carlo hanno iniziato ciascuno il proprio programma lo stesso giorno. Oggi stanno praticando sport diversi e vorrebbero andare a divertirsi nel primo giorno che sia di riposo per entrambi. Possono essere certi di riuscire nel loro intento?

J4. (*14 punti*) In un certo giorno di un certo mese di uno dei prossimi 10 anni ci sarà la luna piena. Se il ciclo lunare fosse composto da esattamente 28 giorni, dopo quanti anni al massimo ci sarebbe di nuovo la luna piena per la prima volta nello stesso giorno dello stesso mese? (Se, ad esempio, accadesse l'anno successivo, dovresti rispondere: dopo 1 anno.)

J5. (*18 punti*) Per quali numeri interi non negativi n, il numero $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ è divisibile per 11?

J6. (*22 punti*) ABC è un triangolo acutangolo di ortocentro H, con il lato AB più lungo del lato AC; denota con E il punto simmetrico di C rispetto all'altezza condotta da A e con F l'intersezione della retta passante per E e H con la retta passante per A e C. Dimostra che il circocentro del triangolo AEF giace sulla semiretta uscente da A e passante per B.

LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Gianni ed Elvira giocano in questo modo. Ci sono 66 gettoni sul tavolo: ad ogni turno ognuno di essi può prendere 1 o 2 o 3 o 4 o 5 gettoni. Chi è costretto a prendere l'ultimo gettone perde. Elvira, che vuole vincere, vuole a tutti i costi essere lei ad iniziare. Perché?

Risposta: perché ha una strategia vincente.
Soluzione. Se Elvira inizia prendendo 5 gettoni, Gianni rimane con 61 gettoni e basta che ogni volta che Gianni toglie N gettoni Elvira ne tolga $6 - N$ perché alla sua ultima giocata possa lasciare sul tavolo un solo gettone.

J2. (*7 punti*) In ogni vertice di un quadrato è stato scritto un intero positivo. Se due vertici sono adiacenti, uno dei due interi corrispondenti divide l'altro; se due vertici sono opposti, nessuno dei due interi corrispondenti divide l'altro. Qual è il più piccolo valore possibile per la somma di questi quattro interi?

Risposta: 35.
Soluzione. Su due vertici opposti vanno scritti 2 e 3; sui rimanenti $2^2 \times 3$ e $3^2 \times 2$. È chiaro che è la quaterna ottimale.

J3. (*11 punti*) Bruno e Carlo praticano tre sport: calcio, pallavolo e nuoto, non più di uno al giorno. Un giorno di calcio deve essere seguito da due giorni di riposo, un giorno di pallavolo da un giorno di riposo, un giorno di nuoto non richiede giorni di riposo e può sostituire un giorno di riposo. Ciascuno ha un programma di allenamento che si ripete periodicamente: in ogni periodo ognuno pratica ogni sport lo stesso numero di volte e l'intervallo minimo di tempo che trascorre tra due volte consecutive in cui uno di loro pratica uno stesso sport è lo stesso per tutti gli sport. Inoltre il programma prevede che i giorni di riposo siano ridotti al minimo possibile. Bruno e Carlo hanno iniziato ciascuno il proprio programma lo stesso giorno. Oggi stanno praticando sport diversi e vorrebbero andare a divertirsi nel primo giorno che sia di riposo per entrambi. Possono essere certi di riuscire nel loro intento?

Risposta: non ne hanno la certezza.
Soluzione. È ovvio che la lunghezza del periodo di allenamento non può essere inferiore a 5 giorni. Posto C = calcio, R = riposo, N = nuoto, P = pallavolo, non riuscirebbero se, ad esempio, con inizio da oggi per entrambi, i due programmi fossero P R C R N e C N R P R.

J4. (*14 punti*) In un certo giorno di un certo mese di uno dei prossimi 10 anni ci sarà la luna piena. Se il ciclo lunare fosse composto da esattamente 28 giorni, dopo quanti anni al massimo ci sarebbe di nuovo la luna piena per la prima volta nello stesso giorno dello stesso mese? (Se, ad esempio, accadesse l'anno successivo, dovresti rispondere: dopo 1 anno.)

Risposta: 248.

Soluzione. Bisogna far trascorrere un numero di anni sufficiente ad accumulare un multiplo intero (positivo) di 28 giorni. In ogni anno di 365 giorni vi sono 13 mesi lunari di 28 giorni e avanza un giorno; nel caso di anno bisestile avanzano 2 giorni: ogni quattro anni avanzano quindi cinque giorni, posto che uno dei quattro anni sia bisestile (cosa che succede sempre tranne quando l'anno multiplo di 4 è un multiplo di 100 ma non di 400). La situazione peggiore (*) si presenta quando l'anno è bisestile (nel periodo contemplato dal quesito, gli anni 2020, 2024 o 2028) e il giorno in esame è il 29 febbraio: in questo caso infatti bisogna anche far trascorrere un numero di anni tale da permettere di rientrare in un anno bisestile.

Poiché 4 e 5 sono coprimi, se tutti gli anni multipli di 4 fossero bisestili, questo significherebbe far passare 28×4 = 112 anni (e in ogni bisestile diverso dal 28-esimo avanzerebbe, modulo 28, un differente numero di giorni compreso tra 1 e 27). Ma, partendo dagli anni contemplati dal quesito (2020, 2024, 2028, tutti successivi al 1988), entro i 112 anni si trova anche 2100 che non è bisestile. Allora, dopo 112 anni mancherebbe un giorno a completare il mese lunare; dopo altri 112 ne mancherebbero 2 (poiché tra questi anni compare il 2200); quindi perché il 29 febbraio ci sia la luna piena occorre e basta aggiungere i 30 giorni che si accumulano nei successivi 6 × 4 = 24 anni (contenenti 6 bisestili): in tutto 248 anni (**).

(*) Purché nell'insieme degli anni che devono trascorrere non si presenti un anno multiplo di 4 non bisestile, se il giorno in esame è compreso tra il 1/3 e il 31/12 possono presentarsi 4 situazioni di periodicità a seconda che sia bisestile

1) l'anno N in esame: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+1+1+2,
2) l'anno $N+1$: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 2+1+1+1,
3) l'anno $N+2$: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+2+1+1,
4) l'anno $N+3$: nei 4 anni successivi si aggiungono giorni secondo lo schema: 1+1+2+1.

Dopo i primi 20 anni necessari per aggiungere 25 giorni, bastano altri 3 anni nel primo caso e solo altri 2 nel secondo e nel terzo caso per aggiungere un mese lunare; invece, nel quarto caso 22 anni aggiungono solo 27 giorni e 23 ne aggiungono 29: per aggiungere 28+28=56=55+1 giorni, basta far passare 44 + 1 = 45 anni. Se invece il giorno in esame è compreso tra il 1/1 e il 28/2, gli schemi sono gli stessi ma slittati (2→1, 3→2, 4→3, 1→4). In ogni caso non si arriva mai a 2100.

(**) Più in generale si può notare che il più lungo intervallo di tempo minimo dopo il quale si ripresenta una certa fase lunare il 29 febbraio è sempre non maggiore di 248 anni. Dato che il periodo minimo con cui si ripresenta la sequenza di anni bisestili è di 400 anni basta verificare che cosa succede ad esempio negli anni da 2000 compreso a 2400 escluso.

- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ o $2100 + 4K$ o $2200 + 4K$ con $8 < K < 25$ dopo **68 anni** si ripete la situazione di partenza: infatti nei 17 quadrienni in esame uno contiene un anno multiplo di 4 non bisestile e 5 × 16 + 4 = 84 = 4 × 28.
- Se l'anno di partenza ha la forma $2300 + 4K$ con $0 \leq K < 22$ la situazione si ripete dopo **112** anni, dato che l'intervallo contiene 2400 (che è bisestile) ma non 2500; se ha la stessa forma ma $22 \leq K < 25$ devono passare **180 anni**, poiché dopo 112 anni avanza un giorno (visto che l'intervallo contiene 2500) e per compensarlo servono gli altri 27 giorni che si accumulano nei successivi 44 anni (tutti bisestili visto che $2480 + 4K < 2600$).
- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ con $0 \leq K < 5$, dopo 68 anni non si supera 2100 e quindi avanza un giorno, ma dopo altri 112 anni tale giorno viene perso in quanto si perde un bisestile (uno solo poiché, se $K < 5$, $2180 + 4K < 2200$) e quindi servono in tutto **180 anni**. Lo stesso succede con anni della forma $2100 + 4K$, $2200 + 4K$ con $0 \leq K < 5$.
- Se l'anno di partenza ha la forma $2000 + 4K$ o $2100 + 4K$ con $5 \leq K \leq 8$, valgono le considerazioni fatte sopra e quindi servono **248 anni**. Invece se ha la forma $2200 + 4K$ con $5 \leq K \leq 8$ bastano **180 anni** poiché dopo 68 anni avanza un giorno che viene che viene recuperato nei restanti 112 anni che comprendono il 2300 non bisestile e il bisestile 2400.

J5. (*18 punti*) Per quali numeri interi non negativi n, il numero $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ è divisibile per 11?

Risposta: Per tutti.

Soluzione. Per induzione su n.

$5 + 16 + 1$ è divisibile per 11; se per qualche $n > 0$, il numero $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ è divisibile per 11 allora $5^5 \times 5^{5n+1} + 4^5 \times 4^{5n+2} + 3^5 \times 3^{5n}$ lo è in quanto 5^5, 4^5 e 3^5 sono congrui a 1 mod11. Per induzione ciò prova che la proprietà vale per tutti gli interi non negativi.

Un'altra dimostrazione possibile è quella prospettata nella soluzione del quesito S4.

J6. (*22 punti*) ABC è un triangolo acutangolo di ortocentro H, con il lato AB più lungo del lato AC; denota con E il punto simmetrico di C rispetto all'altezza condotta da A e con F l'intersezione della retta passante per E e H con la retta passante per A e C. Dimostra che il circocentro del triangolo AEF giace sulla semiretta uscente da A e passante per B.

Soluzione. È chiaro che, per motivi di simmetria, E appartiene alla retta passante per B e C, anzi proprio al segmento BC (poiché il lato AC è più corto del lato AB) e l'angolo AEF è congruente all'angolo HCA. Inoltre AEF è congruente all'angolo formato da AC con la retta t tangente in A alla circonferenza circoscritta al triangolo AEF, poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AF. Quindi l'altezza CH relativa al lato AB è parallela alla retta t e la semiretta uscente da A e passante per B, essendo perpendicolare a t nel punto di tangenza A, contiene un diametro della circonferenza circoscritta al triangolo AEF e quindi il suo centro.