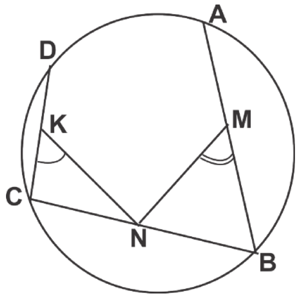
## *LIVELLO STUDENT*




**S1.** (*5 punti*) In figura si vede una circonferenza della quale i segmenti *AB*, *BC* e *CD* sono tre corde. I punti *M*, *N* e *K* sono i loro rispettivi punti medi. L'angolo *CKN* misura 75 gradi. Quanti gradi misura l'angolo *NMB*?

**S2.** (*7 punti*) Nel piano dotato di un sistema *Oxy* di assi cartesiani ortogonali la distanza di due punti viene usualmente definita utilizzando le coordinate dei punti nel rispetto del teorema di Pitagora. Cambiamo la distanza, supponendo di poterci muovere solo in verticale o in orizzontale, ma in orizzontale solo se siamo sull'asse delle ascisse. In formule, la distanza del punto $(x_1,y_1)$ dal punto $(x_2,y_2)$ vale $|y_1 - y_2|$ se $x_1 = x_2$, vale invece $|y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|$ se $x_1 \neq x_2$. Rispetto a questa nuova distanza, qual è il luogo dei punti che distano non più di 3 dal punto (2,1)?

**S3.** (*11 punti*) Considera il seguente gioco per due giocatori che giocano a turno, sorteggiando chi deve giocare per primo. Si parte con due pile di monete. Chi è chiamato a giocare ne scarta una e spezza la rimanente in due nuove pile (di almeno una moneta ciascuna). Perde che non può più giocare. Discuti l'esistenza di strategie vincenti.

**S4.** (*14 punti*) Un numero naturale *n* è scomposto in 2014 fattori primi (non necessariamente tutti distinti fra loro). Ad ogni fattore primo viene sommato 1 e i nuovi 2014 numeri ottenuti vengono moltiplicati fra loro, dando come risultato un numero *m*. È possibile che, per qualche numero naturale *n*, *n* divida il numero *m* così ottenuto? In caso di risposta negativa, fornisci adeguata giustificazione. In caso di risposta affermativa, precisa per quanti numeri naturali *n* accade che *n* divide *m*.

**S5.** (*18 punti*) *n* quadrati di una griglia 8 × 8 sono dipinti di nero, gli altri sono bianchi. Ogni quadrato della griglia, bianco o nero che sia, è adiacente a (cioè ha un lato in comune con) un quadrato nero (diverso da esso nel caso sia nero). Qual è il minimo valore possibile per *n*?

**S6.** (*22 punti*) Si consideri una successione $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ di numeri interi tale che si abbia

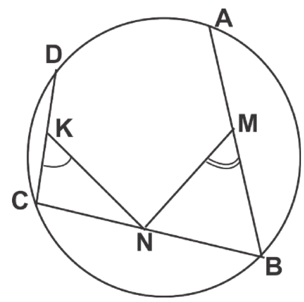
$$a_n = 1 \text{ per infiniti indici } n \text{ e } a_n \neq 1 \text{ per infiniti indici } n.$$

Stabilire se è sempre possibile disporre (tutti e soli) i termini della successione $\{a_n\}$ in una "matrice infinita" $[a_{i,j}]$, $i = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$ in modo che

- per ogni $i$ si abbia $a_{i,j} = 1$ se e solo se $j \geq i$;
- per ogni $i$, $j$ e $k$ con $j < k$, anche nella successione originaria la posizione occupata dal termine $a_{i,j}$ preceda quella occupata dal termine $a_{i,k}$ (come accade ora nella riga $i$-esima della matrice).

# LIVELLO STUDENT

**S1.** (*5 punti*) In figura si vede una circonferenza della quale i segmenti *AB*, *BC* e *CD* sono tre corde. I punti *M*, *N* e *K* sono i loro rispettivi punti medi. L'angolo *CKN* misura 75 gradi. Quanti gradi misura l'angolo *NMB*?




**Soluzione:** 75.
Gli angoli *CDB* e *CAB* hanno la stessa misura $\gamma$ perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Per costruzione (teorema di Talete) i segmenti *KN* e *DB* sono paralleli: allora anche l'angolo *CDB* misura $\gamma$ = 75 gradi. Per gli stessi motivi, anche i segmenti *MN* e *AC* sono paralleli: ne segue che anche l'angolo *NMB* misura $\gamma$ = 75 gradi.

**S2.** (*7 punti*) Nel piano dotato di un sistema *Oxy* di assi cartesiani ortogonali la distanza di due punti viene usualmente definita utilizzando le coordinate dei punti nel rispetto del teorema di Pitagora. Cambiamo la distanza, supponendo di poterci muovere solo in verticale o in orizzontale, ma in orizzontale solo se siamo sull'asse delle ascisse. In formule, la distanza del punto $(x_1,y_1)$ dal punto $(x_2,y_2)$ vale $|y_1 - y_2|$ se $x_1 = x_2$, vale invece $|y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|$ se $x_1 \neq x_2$. Rispetto a questa nuova distanza, qual è il luogo dei punti che distano non più di 3 dal punto (2,1)?

**Soluzione.**
Sia *L* il luogo cercato. Chiaramente, fra i punti di ascissa 2, fanno parte di *L* tutti e soli i punti la cui ordinata sta nell'intervallo [-2, 4] estremi inclusi. Fra i punti di ascissa diversa da 2, fanno parte di *L* tutti e soli i punti $(x,y)$ tali che $|x - 2| + |y| \leq 2$. In definitiva, *L* è costituito dal segmento avente come estremi i punti (2,-2) e (2,4) unito al quadrato di vertici (2,2), (4,0), (2, -2) e (0,0), contorno del quadrato incluso.

**S3.** (*11 punti* ) Considera il seguente gioco per due giocatori che giocano a turno, sorteggiando chi deve giocare per primo. Si parte con due pile di monete. Chi è chiamato a giocare ne scarta una e spezza la rimanente in due nuove pile (di almeno una moneta ciascuna). Perde chi non può più giocare. Discuti l'esistenza di strategie vincenti.

**Soluzione**

Diciamo che una pila è "pari" o "dispari" a seconda che sia formata da un numero pari o dispari di monete.

Il giocatore A vince se lascia l'avversario B di fronte a due pile dispari: infatti B dovrà necessariamente lasciare A di fronte ad una pila pari e una dispari. A questo punto A, scartando la pila dispari, può lasciare ancora B di fronte a due pile dispari: in un numero finito di passi B si troverà di fronte a due pile di una moneta ciascuna e non potrà proseguire.

Chi gioca per primo ha dunque una strategia vincente se le due pile non sono entrambe dispari; se lo sono, una strategia vincente ce l'ha chi gioca per secondo.

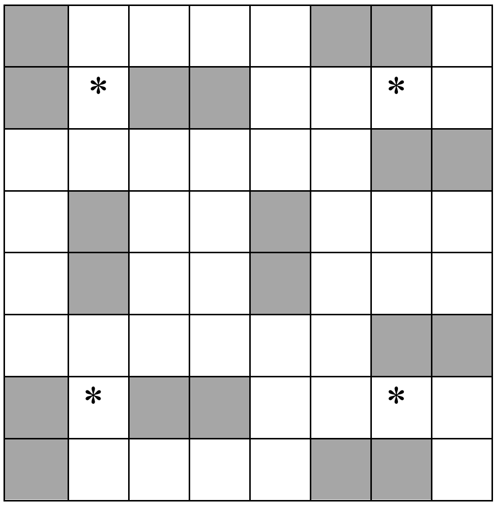
**S4.** (*14 punti* ) Un numero naturale $n$ è scomposto in 2014 fattori primi (non necessariamente tutti distinti fra loro). Ad ogni fattore primo viene sommato 1 e i nuovi 2014 numeri ottenuti vengono moltiplicati fra loro, dando come risultato un numero $m$. È possibile che, per qualche numero naturale $n$, $n$ divida il numero $m$ così ottenuto? In caso di risposta negativa, fornisci adeguata giustificazione. In caso di risposta affermativa, precisa per quanti numeri naturali $n$ accade che $n$ divide $m$.

**Soluzione.** È possibile e i numeri per cui accade sono 336.

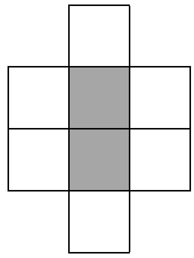
Osserviamo per iniziare che se $n$ contiene un fattore primo $n_i$, dovrà contenere anche un fattore primo $n_j$ tale che $n_j + 1$ sia multiplo di $n_i$; se succede anche che $n_i + 1$ è multiplo di $n_j$ non è necessario che esistano altri fattori primi di $n$. Questo però si verifica solo se $n_i$ è 2 e $n_j$ è 3 (o viceversa). In tutti gli altri casi, supposto $n_j > n_i$, dovrà poi esistere un fattore primo $n_l$ ($>n_j$) tale che $n_l + 1$ sia multiplo di $n_j$ e così via, generando una sequenza infinita di fattori primi, contro l'ipotesi.

Allora i fattori primi di $n$ sono solo 2 e 3 e $n = 2^h \times 3^k$; si ha $m = 3^h \times 4^k$, che sarà divisibile per $n$ se $k \leq h$ e $h \leq 2k$. Da $h + k = 2014$, ricaviamo $1007 \leq h \leq 1342$.

**S5.** (*18 punti* ) *n* quadrati di una griglia 8 × 8 sono dipinti di grigio, gli altri sono bianchi. Ogni quadrato della griglia, bianco o grigio che sia, è adiacente a (cioè ha un lato in comune con) un quadrato grigio (diverso da esso nel caso sia grigio). Qual è il minimo valore possibile per *n*?




**Soluzione**: *n* = 20. Ecco una costruzione possibile.
Il modulo base nella costruzione della copertura è costituito da una croce con al centro due caselle grigie:



Nella soluzione proposta ci sono 4 caselle bianche (segnate con asterisco) che sono adiacenti a due caselle grigie e questo potrebbe far pensare a una ridondanza: dimostriamo che non bastano meno di 20 caselle grigie.

Immaginiamo la nostra griglia come una ordinaria scacchiera con caselle nere e bianche alternate su righe e colonne. La prima casella in alto a sinistra sia nera. Affinché ogni casella nera risulti adiacente a qualche casella dipinta di grigio, questa ultima deve essere una delle caselle bianche, e naturalmente vale il viceversa. Basta quindi provare che occorre che siano dipinte di grigio almeno 10 caselle bianche. Le otto diagonali ascendenti di caselle nere sono composte, nell'ordine dall'alto in basso, da 1, 3, 5, 7, 7, 5, 3, 1 caselle. Consideriamo solo la prima, la terza, la quinta e la settima diagonale. Fissata una qualunque di queste diagonali, una casella bianca dipinta di grigio può essere adiacente ad al più due caselle nere ivi ospitate e non risulterà adiacente ad alcuna casella nera di una diagonale diversa (sempre fra queste): occorre quindi che siano dipinte di grigio almeno una casella bianca per "sistemare" la prima diagonale, almeno tre per la terza, almeno quattro per la quinta, almeno due per la settima.

Si può osservare che enunciato, costruzione e dimostrazione sono facilmente estendibili al caso di griglie $k \times k$ con $k$ pari, essendo il minimo valore possibile per $n$ dato in questo caso da $k(k+2)/4$.

**S6.** (*22 punti*) Si consideri una successione $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$ di numeri interi tale che si abbia

$a_n = 1$ per infiniti indici $n$ e $a_n \neq 1$ per infiniti indici $n$.

Stabilire se è sempre possibile disporre (tutti e soli) i termini della successione $\{a_n\}$ in una "matrice infinita" $[a_{i,j}]$, $i = 1, 2, 3, ...$, $j = 1, 2, 3, ...$ in modo che

- per ogni $i$ si abbia $a_{i,j} = 1$ se e solo se $j \geq i$;
- per ogni $i$, $j$ e $k$ con $j < k$, anche nella successione originaria la posizione occupata dal termine $a_{i,j}$ preceda quella occupata dal termine $a_{i,k}$ (come accade ora nella riga $i$-esima della matrice).

**Soluzione:** è possibile.

Si noti innanzitutto che la successione non può valere definitivamente 1 e non può essere definitivamente diversa da 1, quindi ogni sottosequenza di 1 in posti consecutivi (brevemente: *s1c*) è necessariamente finita, così come ogni sottosequenza di numeri diversi da 1 in posti consecutivi (brevemente: *sdc*). Si proceda ad esempio secondo il seguente schema.

- Si disponga nei primi $n$ ($n \geq 1$) posti della prima riga della matrice la prima *s1c*.
- Si metta al primo posto della seconda riga il primo termine della prima *sdc*.
- Si prosegua la prima riga mettendo la seconda *s1c*.
- Si prosegua la seconda riga con la terza *s1c*.
- Si inizi la terza riga con il secondo e terzo elemento della prima *sdc*: nel caso la prima *sdc* non abbia elementi in quantità sufficiente, si attingano nell'ordine dalle successive (al massimo due) *sdc*.
- Si prosegua la prima riga con la quarta *s1c*, la seconda con la quinta *s1c* e la terza con la sesta *s1c*.
- Si inizi la quarta riga con i primi tre elementi disponibili nelle *sdc* (fatto questo, le *sdc* utilizzate finora non saranno più di 6).
- Si prosegua la prima riga con la settima *s1c*.

È chiaro ora come proseguire nella costruzione della matrice ed è chiaro che, seguendo questo schema, sono rispettati tutti i vincoli imposti. In particolare, anche nel caso "peggiore" in cui tutte le *sdc* siano costituite da un solo termine (e quindi per arrivare a sistemare tutti i primi $n - 1$ termini della riga $n$-esima, che devono essere diversi da 1, sia necessario usare tutte le prime $n(n - 1)/2$ *sdc*) la prima *s1c* della riga $n$-esima sarebbe la $n(n + 1)/2$-ma: dunque il suo primo termine occuperebbe, nella successione di partenza, una posizione successiva a quella occupata dal termine $a_{n,n-1}$.