

Kangourou della Matematica 2012  
Coppa a squadre Kangourou - finale  
Mirabilandia, 6 maggio 2012



## Quesiti

### 1. Paola ed Enrico

Considerate tutti i numeri interi positivi fino a 2012 incluso: Paola calcola la somma di tutti quelli dispari ed Enrico la somma di tutti quelli pari. Di quanto la somma ottenuta da Enrico supera quella ottenuta da Paola?

### 2. Più verde!

Un parco occupa una superficie triangolare. Per aumentarne l'area, si decide di aumentare del 20% la lunghezza di ognuno dei suoi lati. Di quanto, in percentuale, viene aumentata l'area?

### 3. La moltiplicazione

Da quante cifre è formato il numero  $8^5 \times 5^{17} \times 7^3$ ?

### 4. L'orologio del campanile

Nel paese di Marco, il campanile ha un grande orologio tradizionale e suona soltanto alle ore "intere". A una certa ora del pomeriggio, quando il campanile suona, le lancette formano un angolo di 90 gradi. Quanti gradi misura l'angolo acuto che le lancette formano 10 minuti dopo?

### 5. Moltiplica tutti i divisori

Un numero intero positivo  $n$  è tale che, se si moltiplicano fra loro tutti i suoi divisori,  $n$  incluso, si ottiene un numero la cui scrittura (decimale) termina con 15 zeri. Con quanti zeri al massimo può terminare la scrittura (decimale) di  $n$ ?

### 6. Cubo e cubetti

Un cubo è alto meno di un metro ed è ottenuto accostando più di 300 cubetti ciascuno di lato un decimetro. Un ottavo di questi sono rossi, un quarto sono bianchi e i rimanenti sono verdi. Da quanti cubetti è formato il cubo?

### 7. Quante partite?

Sedici tennisti partecipano ad un torneo dove è previsto che ognuno debba incontrare ognuno degli altri una e una sola volta. Quante partite verranno giocate complessivamente in quel torneo?

### 8. Grandi divisori

Qual è il più grande divisore del numero  $2^{14} - 1$  distinto dal numero stesso?

### 9. Il libro da leggere

Roberto deve leggere un libro di 630 pagine. Ieri ne ha letto un terzo e la somma dei numeri delle pagine che leggerà oggi è 5106. Terminata la lettura di oggi, quante pagine del libro gli resteranno da leggere?

### 10. Quanti fattori!

Trovate il valore del seguente prodotto

$$(2012 - 0) \times (2011 - 1) \times (2010 - 2) \times \dots \times (2 - 2010) \times (1 - 2011) \times (0 - 2012).$$

### 11. Passa il treno

Giacomo e Luca sono fermi entrambi a metà del marciapiede di una stazione dove sta arrivando un treno merci, che viaggia ad una velocità costante e non si fermerà in stazione. Quando la fronte del locomotore li raggiunge, iniziano a camminare alla stessa velocità lungo il marciapiede, Giacomo nello stesso verso del treno e Luca in verso opposto. Entrambi si fermano quando vengono raggiunti dalla coda del treno: così facendo, Giacomo ha percorso 45 metri, Luca ha percorso 30 metri. Quanti metri è lungo il treno?

### 12. Marta compra un computer

Marta vuole acquistare un computer e visita due negozi, A e B, dove il prezzo base del computer è il medesimo. In A le propongono uno sconto del 15% sul prezzo base e un ulteriore sconto di 90 euro; in B le propongono semplicemente uno sconto del 25% sul prezzo base. Marta decide di acquistare il computer in A, perché così facendo risparmia 15 euro. Qual è, in euro, il prezzo base del computer?

### 13. Numeri ridotti

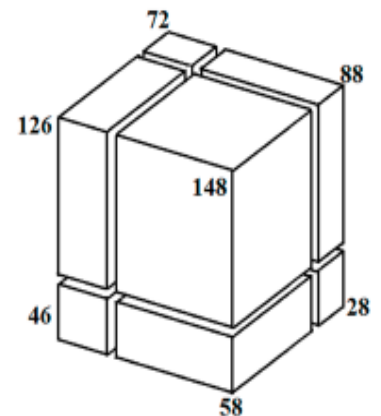
“Ridurre” un numero intero positivo maggiore o uguale a 10 significa per noi moltiplicare fra loro le sue cifre. Naturalmente l’operazione di riduzione può essere iterata (cioè ripetuta sul risultato ottenuto): ad esempio, compiendola due volte di seguito sul numero 57, si ottiene 15. Quanti sono i numeri interi positivi di due cifre tali che, iterando su di essi l’operazione di riduzione, ad un certo punto si ottiene 0?

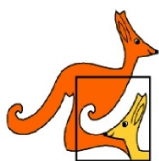
### 14. Triangoli inscritti

Quanti triangoli equilateri si possono costruire i cui vertici siano vertici di uno stesso poligono regolare di 2012 lati?

### 15. Il cubo sezionato

Osserva la figura (che non è in scala). Un cubo è stato sezionato con tre piani, a due a due perpendicolari, ottenendo 8 parallelepipedi rettangoli; per 7 di essi, viene indicata l’area in  $\text{cm}^2$  della superficie totale. Quanto vale (in  $\text{cm}^2$ ) l’area della superficie totale dell’ottavo? Potete avvalervi della seguente informazione aggiuntiva: la misura del lato del cubo è un numero intero di centimetri.





Kangourou della Matematica 2012  
Coppa a squadre Kangourou - finale  
Mirabilandia, 6 maggio 2012



## Quesiti e risposte

### 1. Paola ed Enrico

Considerate tutti i numeri interi positivi fino a 2012 incluso: Paola calcola la somma di tutti quelli dispari ed Enrico la somma di tutti quelli pari. Di quanto la somma ottenuta da Enrico supera quella ottenuta da Paola?

[1006] Ciascuno somma 1006 addendi, e ogni addendo della somma di Enrico è maggiore di 1 del corrispondente addendo della somma di Paola.

### 2. Più verde!

Un parco occupa una superficie triangolare. Per aumentarne l'area, si decide di aumentare del 20% la lunghezza di ognuno dei suoi lati. Di quanto, in percentuale, viene aumentata l'area?

[0044] Dette  $b$  e  $h$  le lunghezze rispettivamente di un lato e della relativa altezza del triangolo

iniziale, l'area della superficie incrementata è  $\frac{120}{100}b \times \frac{120}{100}h \times \frac{1}{2} = \frac{144}{100} \times \frac{b \times h}{2}$ .

### 3. La moltiplicazione

Da quante cifre è formato il numero  $8^5 \times 5^{17} \times 7^3$ ?

[0019]  $8^5 \times 5^{17} \times 7^3 = 2^{15} \times 5^{15} \times 5^2 \times 7^3 = 10^{15} \times 8575$

### 4. L'orologio del campanile

Nel paese di Marco, il campanile ha un grande orologio tradizionale e suona soltanto alle ore "intere". A una certa ora del pomeriggio, quando il campanile suona, le lancette formano un angolo di 90 gradi. Quanti gradi misura l'angolo acuto che le lancette formano 10 minuti dopo?

[0035] La lancetta dei minuti deve essere sullo 0; poiché è pomeriggio, quella delle ore deve essere sulle 3. Dopo 10 minuti la lancetta dei minuti è avanzata di  $60^\circ$  mentre quella delle ore è avanzata di  $5^\circ$  e la loro distanza si è ridotta a  $35^\circ$ .

### 5. Moltiplica tutti i divisori

Un numero intero positivo  $n$  è tale che, se si moltiplicano fra loro tutti i suoi divisori,  $n$  incluso, si ottiene un numero la cui scrittura (decimale) termina con 15 zeri. Con quanti zeri al massimo può terminare la scrittura (decimale) di  $n$ ?

[0002] Osserviamo che 1000 ha tra i suoi divisori 1000, 500, 200, 100, 250, 50, 40, 20, 10, 5, 2, e che il prodotto dei divisori scritti è multiplo di  $10^{16}$  (termina con almeno 16 zeri); di conseguenza ogni numero che termini con almeno tre zeri ha il prodotto dei divisori con più di 15 zeri. Esistono invece numeri che terminano con due zeri tali che il prodotto dei loro divisori termini con esattamente 15 zeri, ad esempio 400: oltre ai divisori di 100, gli altri divisori di 400 sono 8, 16, 40, 80, 200, 400, dunque il prodotto di tutti i divisori di 400 è  $8^5 \times 10^{15}$ .

## 6. Cubo e cubetti

Un cubo è alto meno di un metro ed è ottenuto accostando più di 300 cubetti ciascuno di lato un decimetro. Un ottavo di questi sono rossi, un quarto sono bianchi e i rimanenti sono verdi. Da quanti cubetti è formato il cubo?

[0512] Il cubo deve essere alto almeno 70 cm. Infatti un cubo alto 60 cm sarebbe formato da  $6^3=216$  cubetti. Il numero dei cubetti deve poi essere divisibile per 8, quindi pari, e questo ci fa scartare le altezze 70 e 90 cm. Il cubo è alto 80 cm e quindi formato da  $8^3=512$  cubetti.

## 7. Quante partite?

Sedici tennisti partecipano ad un torneo dove è previsto che ognuno debba incontrare ognuno degli altri una e una sola volta. Quante partite verranno giocate complessivamente in quel torneo?

[0120] Ogni tennista gioca 15 partite: poiché ogni partita è giocata da due tennisti il numero delle partite è  $16 \cdot 15 / 2 = 120$

## 8. Grandi divisori

Qual è il più grande divisore del numero  $2^{14} - 1$  distinto dal numero stesso?

[5461]  $2^{14} - 1 = 16383 = 3 \times 5461$ .

## 9. Il libro da leggere

Roberto deve leggere un libro di 630 pagine. Ieri ne ha letto un terzo e la somma dei numeri delle pagine che leggerà oggi è 5106. Terminata la lettura di oggi, quante pagine del libro gli resteranno da leggere?

[0397] Ieri Roberto ha letto 210 pagine del libro, quindi oggi partirà da pagina 211 e, se oggi leggerà  $n$  pagine, la somma dei numeri delle pagine sarà  $210 \times n + \frac{n(n+1)}{2} = 5106$ . Si può risolvere l'equazione (di secondo grado) o più semplicemente osservare che il numero di pagine che leggerà oggi è vicino a 20: se ne leggesse 20, la somma dei numeri delle pagine lette sarebbe 4410, e arriverebbe a pag. 230. Poiché la differenza  $5106 - 4410 = 696 = 231 + 232 + 233$  concludiamo che oggi leggerà 23 pagine.

## 10. Quanti fattori!

Trovate il valore del seguente prodotto

$$(2012 - 0) \times (2011 - 1) \times (2010 - 2) \times \dots \times (2 - 2010) \times (1 - 2011) \times (0 - 2012).$$

[0000] Tra i fattori c'è  $1006-1006=0$ .

### 11. Passa il treno

Giacomo e Luca sono fermi entrambi a metà del marciapiede di una stazione dove sta arrivando un treno merci, che viaggia ad una velocità costante e non si fermerà in stazione. Quando la fronte del locomotore li raggiunge, iniziano a camminare alla stessa velocità lungo il marciapiede, Giacomo nello stesso verso del treno e Luca in verso opposto. Entrambi si fermano quando vengono raggiunti dalla coda del treno: così facendo, Giacomo ha percorso 45 metri, Luca ha percorso 30 metri. Quanti metri è lungo il treno?

[0180] La coda del treno si sposta di 75 metri nel tempo in cui Giacomo percorre gli ultimi 15 metri quindi la velocità del treno è 5 volte quella dei ragazzi. Quando Giacomo ha percorso 45 metri, la distanza dal punto da cui hanno iniziato a camminare è 225 metri per la testa del treno e 45 metri per la coda, quindi il treno è lungo 180 metri.

### 12. Marta compra un computer

Marta vuole acquistare un computer e visita due negozi, A e B, dove il prezzo base del computer è il medesimo. In A le propongono uno sconto del 15% sul prezzo base e un ulteriore sconto di 90 euro; in B le propongono semplicemente uno sconto del 25% sul prezzo base. Marta decide di acquistare il computer in A, perché così facendo risparmia 15 euro. Qual è, in euro, il prezzo base del computer?

[0750] Se  $x$  è il prezzo base del computer, si sa che  $\frac{85}{100} \times x - 90 = \frac{75}{100} \times x - 15$  da cui  $x = 750$ .

### 13. Numeri ridotti

“Ridurre” un numero intero positivo maggiore o uguale a 10 significa per noi moltiplicare fra loro le sue cifre. Naturalmente l'operazione di riduzione può essere iterata (cioè ripetuta sul risultato ottenuto): ad esempio, compiendola due volte di seguito sul numero 57, si ottiene 15. Quanti sono i numeri interi positivi di due cifre tali che, iterando su di essi l'operazione di riduzione, ad un certo punto si ottiene 0?

[0024] Certamente vale per tutti i multipli di 10, che sono 9; i primi 4 di essi possono essere ottenuti anche come prodotto di due cifre, dando origine al altri numeri riducibili a 0 secondo il seguente schema:

			59		78				
	25	55		45		56		58	
				95				87	
10			20		30		40		50 60 70 80 90
				69					
	52			54		65		85	
				96					

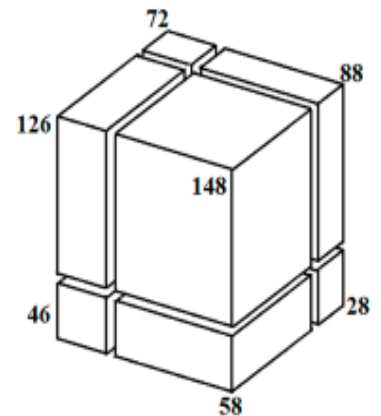
#### 14. Triangoli inscritti

Quanti triangoli equilateri si possono costruire i cui vertici siano vertici di uno stesso poligono regolare di 2012 lati?

[0000] I tre vertici devono essere equidistanti ma, poiché 2012 non è divisibile per 3, non esistono terne con questa proprietà tra i vertici di un poligono regolare di 2012 lati.

#### 15. Il cubo sezionato

Osserva la figura (che non è in scala). Un cubo è stato sezionato con tre piani, a due a due perpendicolari, ottenendo 8 parallelepipedi rettangoli; per 7 di essi, viene indicata l'area in  $\text{cm}^2$  della superficie totale. Quanto vale (in  $\text{cm}^2$ ) l'area della superficie totale dell'ottavo? Potete avvalervi delle seguenti informazioni aggiuntive: la misura del lato del cubo è un numero intero di centimetri e l'area cercata non è la maggiore fra quelle degli otto parallelepipedi.



[0022] Osserviamo che sommando le aree delle superficie di tutti i parallelepipedi in cui è sezionato il cubo otteniamo il doppio dell'area della superficie del cubo; detti  $2x$  l'area cercata e  $l$  il lato del cubo si ha  $148 + 58 + 28 + 88 + 72 + 126 + 46 + 2x = 12l^2$ , cioè  $283+x=6l^2$ . Dalla disuguaglianza  $283 < 6l^2$  si ha che  $l$  è un intero maggiore di 6; inoltre poiché  $2x$  è minore di 148,  $l^2$  è minore di 60 e  $l$  è minore di 8.  $l$  è quindi 7 e  $2x=22$ .