Kangourou della Matematica
2012
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2012

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?

C2. (*7 punti*) Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?

C3. (*11 punti*) Assegnati tre punti non allineati nello spazio, quante sfere passano per questi tre punti? Nel caso ne possa passare più di una, come si può determinare il raggio di quella che ha raggio minore?

C4. (*14 punti*) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura. Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?

C5. (*18 punti*) Maurizio si trova in un grattacielo di 99 piani, ma non si ricorda a che piano è. Il sistema per chiamare l'ascensore è inusuale. Ogni piano dispone di una pulsantiera con tasti dallo 0 al 99: premendo un pulsante l'ascensore raggiungerà il piano corrispondente al numero riportato sul tasto, ma rimarrà occupato, qualunque sia il piano, per il tempo necessario a percorrere 99 piani. Considerando che Maurizio può vedere dal vetro della porta se l'ascensore passa per il suo piano e che ora l'ascensore è al piano 0, qual è il numero minimo di pulsanti premendo i quali avrà la garanzia di sapere a che piano si trova?

C6. (*22 punti*) Dimostra che ogni poliedro (solido la cui superficie è costituita da un numero finito di poligoni) ha almeno due facce che hanno lo stesso numero di spigoli. Esistono poliedri che non hanno tre facce con lo stesso numero di spigoli?

LIVELLO CADET

Per ciascun quesito, riporta la soluzione insieme ad una breve giustificazione nello spazio disponibile (se necessario, puoi utilizzare anche il retro del foglio).

C1. (*5 punti*) Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?

Soluzione: 4.
Le 12 biglie non blu sono marroni o rosse o verdi; le rosse sono 5, le verdi sono 20 – 17 = 3 e quindi le marroni sono 12 – 3 – 5 = 4.

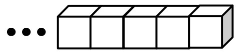
C2. (*7 punti*) Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?

Soluzione: 5.
Tra i dispari compresi tra 1 e 2012 c'è 5. Se uno dei fattori di un prodotto è 5, la cifra delle unità del prodotto può essere solo 0 o 5. D'altra parte nel prodotto non ci sono fattori pari e quindi tale cifra non può essere 0.

C3. (*11 punti*) Assegnati tre punti non allineati nello spazio, quante sfere passano per questi tre punti? Nel caso ne passi più di una, come si può determinare il raggio di quella che ha raggio minore?

Soluzione: infinite. È il raggio della circonferenza per i tre punti.
Ricordiamo che l'insieme dei punti che hanno ugual distanza da un punto fissato nello spazio è la sfera, nel piano è la circonferenza.
Osserviamo che per tre punti A, B, C passa uno ed un sol piano Π e una ed una sola circonferenza, giacente su tale piano, il cui centro O è l'intersezione degli assi dei segmenti AB e BC in quanto per tale punto risulta $OA = OB = OC$ (infatti l'asse di un segmento è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza dai suoi due estremi). Consideriamo la retta passante per O e perpendicolare al piano Π: per il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OPA, OPB, OPC, ogni suo punto P ha uguale distanza da A, B, C e quindi è il centro di una sfera passante per i tre punti.
Il raggio PA di tale sfera è minimo quando l'ipotenusa PA del triangolo OPA coincide con il cateto OA.

C4. (*14 punti*) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura.



Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?

Soluzione: non può riuscirci.

Le facce laterali contribuiscono per ogni dado con 14 punti e in più i due dadi estremi contribuiscono con la somma dei punti sulle due facce terminali, una per ciascun dado. Poiché si incollano facce con lo stesso punteggio, se il numero di dadi è dispari (e quindi il numero di incollature è pari) le due facce estreme avranno punteggi a somma 7, se il numero di dadi è pari (e quindi il numero di incollature è dispari) le due facce estreme avranno lo stesso punteggio e quindi contribuiranno con $2n$ punti (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Poiché dividendo 2012 per 14 si ha quoziente 143 (e resto 10), la somma 2012 non può essere ottenuta.

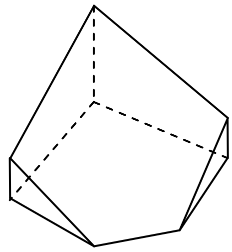
C5. (*18 punti*) Maurizio si trova in un grattacielo di 99 piani, ma non si ricorda a che piano è. Il sistema per chiamare l'ascensore è inusuale. A ogni piano è presente una pulsantiera con tasti dallo 0 al 99: premendo un pulsante l'ascensore raggiungerà il piano corrispondente al numero riportato sul tasto, ma risulterà occupato, per un tempo che non è correlato in alcun modo con il percorso compiuto. Considerando che Maurizio può vedere dal vetro della porta se l'ascensore passa per il suo piano e che ora l'ascensore è al piano 0, qual è il numero minimo di pulsanti premendo i quali avrà la garanzia di sapere a che piano si trova?

Soluzione: 6

Maurizio non si trova al piano 0 altrimenti vedrebbe l'ascensore fermo. Allora può procedere in questo modo. Inizia a premere il tasto **50**: se l'ascensore si ferma al suo piano conclude di essere al piano 50. Se vede passare l'ascensore si troverà tra il piano 1 e il piano 49, altrimenti tra il piano 51 e il piano 99: come prima, la strategia consiste nel premere il tasto corrispondente al piano che si trova a metà tra il primo e l'ultimo in cui può trovarsi Maurizio e, dato che le due situazioni sono simmetriche, possiamo supporre che Maurizio si trovi tra il piano 1 e il piano 49. Preme quindi il tasto **25**: se l'ascensore si ferma al suo piano conclude di essere al piano 25. Se non vede passare l'ascensore e quindi scopre di trovarsi tra il piano 1 e il piano 24 preme il tasto **13**: il caso peggiore si presenta se scopre di trovarsi tra il piano 1 e il piano 12 (12 piani invece di 11). Iterando il ragionamento e supponendo che si presenti sempre il peggiore dei casi, i tasti da premere saranno il **7**, poi il **4**, poi il **2**.

C6. (*22 punti*) Dimostra che ogni poliedro (solido la cui superficie è costituita da un numero finito di poligoni) ha almeno due facce che hanno lo stesso numero di spigoli. Esistono poliedri che non hanno (almeno) tre facce con lo stesso numero di spigoli?

Soluzione: la dimostrazione segue; la risposta è affermativa
Supponiamo che nel poliedro non ci siano facce con più di N spigoli: se tutte avessero un numero diverso di spigoli ne esisterebbero una sola con N spigoli, una sola con N - 1 spigoli, …, una sola con 3 spigoli, cioè esisterebbero solo N - 4 facce con un numero non massimo di spigoli mentre alla faccia con N spigoli devono potersi "attaccare" N facce.



Esistono poliedri che non hanno tre facce con lo stesso numero di spigoli, ad esempio quello con 6 facce di cui due con 5 spigoli, due con 4 spigoli, due con 3 spigoli.