Kangourou Italia
Gara del 28 marzo 2007
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza della secondaria di secondo grado

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Ci sono 5 riquadri (numerati da 1 a 5), ognuno contenente alcune vocali come indicato in figura. Levando in modo opportuno alcune vocali da alcuni riquadri, è possibile fare in modo che ogni riquadro arrivi a contenere una sola vocale, e che riquadri diversi contengano vocali diverse. Qual è la vocale rimasta nel riquadro numero 2?

1	2	3	4	5
A E I O U	E I O U	E U	I	E I

A) A B) E C) I D) O E) U

2. Il primo marzo è un giorno importante per la famiglia Rossi: il padre e i suoi tre figli festeggiano tutti il compleanno. Il primo marzo 2008, il padre ha compiuto 30 anni e la somma delle età dei tre figli è stata di 15 anni. Il primo marzo di quale anno la somma delle età dei tre figli sarà per la prima volta superiore all'età del padre? (Supponiamo che l'età di una persona sia sempre arrotondata per difetto ad un numero intero.)

A) 2013 B) 2014 C) 2015 D) 2016 E) 2017

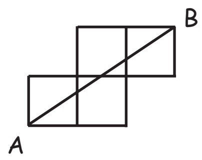
3. Per festeggiare l'arrivo dell'anno nuovo, Alfredo ha indossato una maglietta con la scritta 2008 sul davanti. Si è quindi messo di fronte ad uno specchio, eretto sulle mani a testa in giù e piedi un alto. Il suo amico Nicola è accanto a lui, in piedi (sui suoi piedi) e guarda lo specchio. Che scritta vede Nicola nello specchio?

A) 2000 B) 5008 C) 8002 D) 8005 E) 2005

4. I numeri A, B, C, D, E sono definiti nel modo seguente
$A = 2-(-4)$, $B = (-2)(-3)$, $C = 2-8$, $D = 0-(-6)$ ed $E = (-12):(-2)$
Quanti di essi sono diversi da 6 ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

5. I quattro quadrati in figura hanno tutti lato 1. Qual è la lunghezza del segmento AB ?



A) 5 B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ D) $\sqrt{5}$
E) Nessuna delle precedenti.

6. Qual è il minimo numero di lettere della parola KANGOUROU, sopprimendo le quali le lettere restanti vengono a trovarsi in ordine alfabetico?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

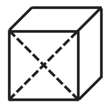
7. Nel riquadro, a ogni lettera corrisponde una e una sola cifra e, viceversa, ogni cifra in gioco è rappresentata da una e una sola lettera. Qual è la cifra corrispondente alla lettera K?

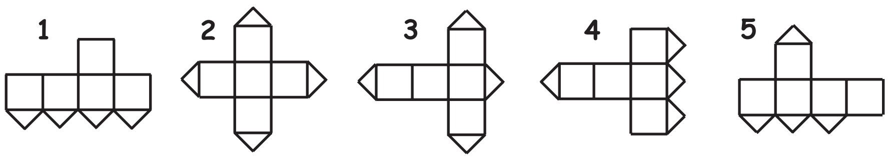
```
   O K +
   K O =
 -------
 W O W
```

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 9

8. Tom e Jerry hanno ciascuno un rettangolo. I due rettangoli sono uguali. Ciascuno taglia il proprio. Tom ottiene due rettangoli ognuno con perimetro di 40 cm, Jerry ottiene due rettangoli ognuno con perimetro di 50 cm. Qual era il perimetro dei rettangoli iniziali?
A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm D) 80 cm E) 100 cm

9. Una faccia di un cubo è tagliata lungo le sue due diagonali. Quali dei seguenti non sono sviluppi piani di tale cubo?





A) 1 e 3 B) 1 e 5 C) 3 e 4 D) 3 e 5 E) 2 e 4

10. Nella mia classe i test di matematica sono composti da cinque quesiti. Nel primo test che ho affrontato ho risposto correttamente solo ad uno dei cinque quesiti. Se da ora in poi mi preparo molto bene, in modo da essere in grado di rispondere sempre correttamente ad ogni quesito, quanti test devo affrontare ancora per avere una media di quattro risposte corrette su cinque?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. 7 cugini sono nati nello stesso giorno, ma in 7 anni consecutivi. Sommando oggi le età dei tre più giovani, si ottiene 42. Qual è la somma delle età attuali dei tre più vecchi?
A) 51 B) 54 C) 57 D) 60 E) 63

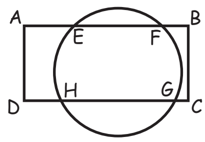
12. Una scatola contiene sette carte numerate da 1 a 7. Due saggi pescano a caso delle carte dalla scatola: il primo ne prende tre, il secondo due delle rimanenti; le ultime due restano chiuse nella scatola. Il primo saggio, dopo aver guardato solo i numeri scritti sulle carte da lui pescate, dice al secondo: "Sono certo che la somma dei numeri riportati sulle tue carte è pari". Quanto vale la somma dei numeri riportati sulle carte pescate dal primo saggio?
A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

13. Hai a disposizione solo i numeri 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68. Qual è il minimo numero di essi la cui somma dia esattamente 100?
A) 5 B) 3 C) 4 D) 6
E) È impossibile ottenere 100

Junior

14. Sia n il numero intero 999…999, dove compare solo la cifra "9" per 2008 volte. Quante volte compare la cifra "9" nel prodotto 99 n?
A) 2007 B) 2006 C) 2008 D) 2 E) 1

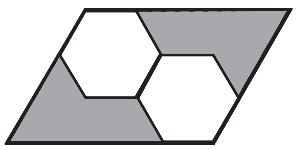
15. Osserva la figura. Il rettangolo ABCD interseca la circonferenza nei punti E, F, G, H. In metri, la lunghezza di AE vale 4, quella di EF vale 5 e quella di DH vale 3. Quanto vale, in metri, la lunghezza di HG?



A) 6 B) 22/3 C) 20/3 D) 8
E) Un valore diverso dai precedenti.

16. Per ogni numero di due cifre, sottraiamo la cifra delle unità da quella delle decine. Quanto vale la somma di tutte queste differenze?
A) 90 B) 100 C) 55 D) 45 E) 30

17. I due esagoni che appaiono in figura sono regolari e l'area del parallelogramma vale 1. Quanto vale l'area della parte ombreggiata ?

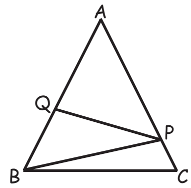


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{17}{36}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{12}{23}$

18. Il numero 20082008…2008 è composto da 1000 cifre. Voglio cancellarne alcune, facendo in modo che la somma delle cifre restanti sia 2008. Quante ne posso cancellare al massimo?

A) 260 B) 564 C) 500 D)601 E) 746

19. Osserva la figura. Si sa che AB = AC, che PQ è perpendicolare ad AB, che l'angolo BPC misura 120 gradi e l'angolo ABP misura 50 gradi. Quanto misura in gradi l'angolo PBC?



A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

20. Quante sono le coppie (ordinate) di numeri reali tali che siano uguali fra loro la somma dei due numeri, il prodotto dei due numeri e il rapporto fra il primo e il secondo numero?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Junior

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Per un numero intero di 6 cifre significative (in rappresentazione decimale), considera la seguente proprietà: ogni cifra dalla terza in poi è la somma delle due cifre che la precedono (conta le cifre da sinistra verso destra). Quanti sono i numeri che hanno questa proprietà?

A) 3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

22. Un cubo grande, costruito accostando 27 cubi piccoli, presenta tre facce verniciate di rosso e le altre tre verniciate di blu. Quanti dei cubi piccoli presentano almeno due facce verniciate di colori diversi?

A) 13 B) 12 C) 14 D) 16
E) Dipende da come sono stati assegnati i colori alle facce del cubo grande.

23. Per ogni numero intero positivo n maggiore o uguale a 2 si pone

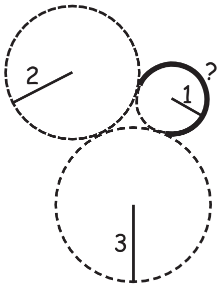
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Si sa che per un intero k si ha $k! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.
Quanto vale k?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

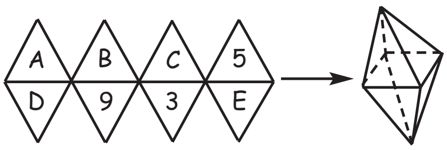
Junior

24. In figura sono rappresentate tre circonferenze a due a due tangenti esternamente; i raggi valgono come indicato. Quanto è lungo l'arco della circonferenza di raggio 1 individuato in grassetto?



A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

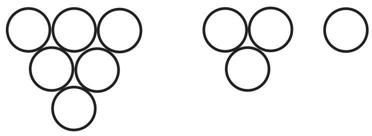
25. Gli otto triangoli equilateri accostati come in figura costituiscono uno sviluppo piano di un ottaedro regolare. Ognuno dei triangoli è contraddistinto da un numero o da una lettera. Ognuna delle cinque lettere indica uno e uno solo fra i numeri 2, 4, 6, 7 e 8 e lettere diverse indicano numeri diversi, in modo che l'ottaedro risultante abbia questa proprietà: al variare dei vertici, la somma dei numeri riportati sulle quattro facce che concorrono in un vertice è sempre la stessa. Quanto deve valere la somma B+D?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

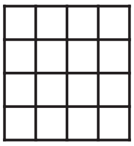
26. Il numero $3^{32} - 1$ ha esattamente due divisori (interi) entrambi maggiori di 75 e minori di 85. Quanto vale il prodotto di questi due divisori?
A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

27. Una 3-piramide è formata dalla sovrapposizione dei 3 "piani" di sfere (tutte uguali fra loro) indicati nella figura. In modo analogo per ogni intero positivo *n* è possibile realizzare una *n*-piramide. Considera una 8-piramide e supponi che tutte le sue sfere esterne vengano dipinte di nero e tutte le altre di bianco (una sfera è considerata "esterna" quando è a contatto con il tetraedro regolare circoscritto alla piramide). Che figura formano le sfere dipinte di bianco?



A) Una 3-piramide B) Una 4-piramide C) Una 5-piramide
D) Una 6-piramide E) Una 7-piramide

28. Osserva la figura. Un quadrato 4x4 è scomposto in 16 quadrati 1x1. Qual è il massimo numero di diagonali dei singoli quadrati 1x1 che è possibile tracciare, se si vuole che diagonali diverse non abbiano punti in comune (neppure i punti agli estremi)?

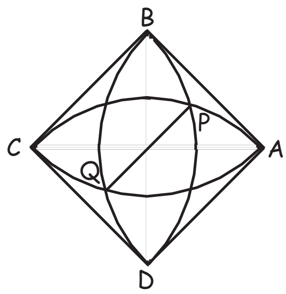


A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

29. Il canguro Kang è capace di muoversi solo saltando e sa fare salti solo da un metro o da tre metri. Kang vuole spostarsi di dieci metri in linea retta. Quante sono le possibili sequenze di salti che glielo consentono? (Considera diverse due sequenze diversamente ordinate, come ad esempio {1,3,3,3} e {3,3,3,1}).

A) 28 B) 26 C) 35 D) 55 E) 56

30. In figura, ABCD è un quadrato di lato 1 e gli archi di circonferenza sono centrati ognuno in uno dei vertici del quadrato con estremi nei vertici adiacenti. Quanto è lungo il segmento PQ?



A) $2-\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{4}$

C) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}-1$

Junior

Kangourou della Matematica 2008
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza delle scuola secondaria di secondo grado

1. Risposta **D)**. Poiché nel riquadro 4 vi è solo la I, nel riquadro 5 deve rimanere la E, quindi nel 3 la U e nel 2 la O.

2. Risposta **D).** Ad ogni anno che passa la differenza fra l'età del padre e la somma delle età dei tre figli (15 nel 2008) decresce di 2 unità. Occorreranno dunque 8 anni perché tale differenza diventi negativa.

3. Risposta **B)**. La cifra "8" ha asse di simmetria sia verticale sia orizzontale: allo specchio e capovolgendo la persona deve dunque apparire inalterata. Vedendosi a sinistra una volta capovolta la persona, deve inoltre comparire alla destra della sequenza di simboli allo specchio: solo la risposta B) è compatibile con questo vincolo.

4. Risposta **B)**. È facile eseguire tutte le operazioni indicate: il risultato è sempre 6 tranne che per l'operazione C), il cui risultato è -6.

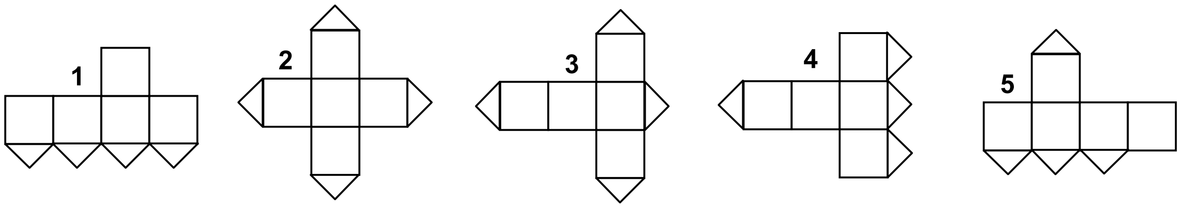
5. Risposta **B)**. Il segmento AB è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano uno 2 e l'altro 3. Basta ora applicare il teorema di Pitagora.

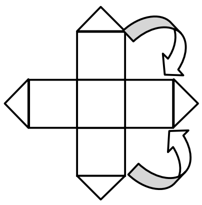
6. Risposta **D)**. Nella parola KANGOUROU vi sono 4 inversioni, rispetto all'ordine alfabetico, di lettere consecutive: KA, NG, UR, RO. È evidente che, anche avendo a che fare con queste sole otto lettere, sarebbero necessarie 4 soppressioni per ristabilire l'ordine alfabetico. D'altra parte, sopprimendo ad esempio K, N, la prima U e la seconda O, si ottiene lo scopo.

7. Risposta **E)**. K non può corrispondere a 0 (zero), altrimenti W e O dovrebbero corrispondere alla stessa lettera. D'altra parte, K + O deve produrre, tenendo conto di un eventuale riporto di 1, O come cifra delle unità: non rimane che la possibilità K = 9 (con W = 1, cosa ovvia da subito, e O = 2).

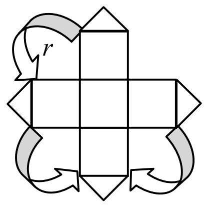
8. Risposta **C)**. Denotiamo con $2x$ e $2y$ le misure in centimetri dei lati del rettangolo iniziale: allora il semiperimetro di ciascuno dei rettangoli di Tom soddisfa l'equazione $2x + y = 20$ e il semiperimetro di ciascuno dei rettangoli di Jerry soddisfa l'equazione $x + 2y = 25$. Dal sistema delle due equazioni si ricava che $y = x + 5$ da cui $x = 5$ e $y = 10$; quindi la misura in centimetri del perimetro del rettangolo iniziale vale $4(x + y) = 60$.

9. Risposta **D)**.





In **2** i 4 triangoli si congiungono a formare il quadrato "coperchio" del cubo; **4** si può pensare ottenuto da 2 ruotando di 90° due quadrati con triangolo, come nella figura **a sinistra**;



1 si ottiene da 2 come indicato nella figura **a destra** ruotando di 90° (rotazione *r*) il quadrato con triangolo più in alto e poi ruotando la coppia di quadrati con triangoli così ottenuta ancora di 90° nello stesso verso e il quadrato con triangolo a destra in verso opposto: quindi tutti questi sono sviluppi del cubo.

Invece quando si cerca di "riavvolgere" **3** si vede che i triangoli in alto e in basso vanno a sovrapporsi al primo quadrato a sinistra (e quindi mancano due triangoli per chiudere l'ultima faccia); quando si cerca di "riavvolgere" **5** si trova che il triangolo in alto si sovrappone sul quadrato più a destra (e quindi manca un triangolo per chiudere l'ultima faccia).

10. Risposta **B)**. Dopo il primo test sono "sotto" di 3 risposte esatte rispetto alla media che mi sono imposto. Rispondendo esattamente, da ora in poi, ad ogni domanda, ad ogni test sostenuto guadagnerei una di quelle 3 risposte esatte in più che mi occorrono per ristabilire la media.

11. Risposta **B)**. Ordiniamo in ordine crescente 7 interi consecutivi: il settimo supera di 4 il terzo, il sesto supera di 4 il secondo e il quinto supera di 4 il primo. La somma dei tre interi più grandi è dunque uguale alla somma dei tre interi più piccoli aumentata di 12.

12. Risposta **B)**. Il primo saggio può affermare con certezza che la somma delle due carte in mano al secondo saggio è pari se e solo se le quattro carte rimaste dopo che lui ne ha prese tre sono tutte pari o tutte dispari. Poiché le carte pari nel mazzo sono solo tre, devono essere rimaste le quattro dispari. Il primo saggio ha allora pescato il 2, il 4 e il 6, con somma 12.

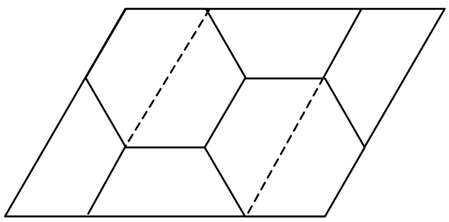
13. Risposta **A)**. I numeri disponibili si ottengono tutti sommando 3 ad un opportuno multiplo di 5: poiché 100 è multiplo di 5, affinché la somma di k di essi dia esattamente 100 occorre allora che anche $3k$ sia multiplo di 5, dunque che lo sia k. Ciò significa che occorrono almeno 5 numeri: in effetti si ha 3 + 13 + 23 + 28 + 33 = 100.

14. Risposta **A)**. Scrivendo $99n$ come $100n - n$ e immaginando di eseguire la sottrazione, è facile (considerando tutti i "riporti") rendersi conto che, delle 2010 cifre della differenza, non sono 9 solo le ultime due e la prima.

15. Risposta **E)**. Due corde parallele di una stessa circonferenza hanno lo stesso asse: la lunghezza di *HG* è dunque quella di EF più due volte la differenza fra quella di AE e quella di DH, cioè 5 + 2 = 7.

16. Risposta **D)**. Per ogni numero di due cifre, che non termini con 0, ne esiste un altro che si ottiene scambiando le cifre: ad es. 93 e 39, oppure 27 e 72. La differenza tra la cifra delle decine e quella delle unità del primo numero si elide con quella delle cifre del numero da esso ottenuto scambiando le cifre. Dunque la somma finale sarà formata solo dalla differenza tra le cifre delle decine e delle unità dei numeri 10, 20 , …, 80, 90. Tale somma vale 1 + 2 + 3 + 4 + … + 8 + 9 = 45.

17. Risposta **A)**. Basandosi sull'informazione che i due esagoni sono regolari (dunque di uguale lato) e lavorando di conseguenza sugli angoli, è facile osservare che ciascuna delle due regioni ombreggiate ha la stessa area di ciascun esagono. Infatti ogni tale regione è ottenibile accostando opportunamente due trapezi isosceli identici a quelli il cui accostamento per la base maggiore fornisce ognuno dei due esagoni (v. figura).



18. Risposta **E)**. Il numero in questione è ottenuto accostando 1000/4 = 250 volte il blocco 2008: la somma delle sue cifre è dunque 250 × (2 + 8) = 2500, per cui vanno cancellate cifre per un totale di 2500 – 2008 = 492. Naturalmente è mio interesse cancellare tutti i 500 zeri e quanti più 2 possibile, quindi 496 : 2 = 246, per un totale di 746 cifre.

19. Risposta **A)**. L'angolo BPQ misura 180 – (90 + 50) = 40 gradi, quindi l'angolo QPA misura 180 – (120 + 40) = 20 gradi. Allora l'angolo BAC misura 180 – (90 + 20) = 70 gradi, per cui l'angolo ABC misura (180 – 70)/2 = 55 gradi e, di conseguenza, l'angolo PBC misura 55 – 50 = 5 gradi.

20. Risposta **B)**. Una coppia (a, b) soddisfa tutti i requisiti se

$$a + b = a \times b = a/b.$$

Non può essere $a = 0$ (la prima uguaglianza imporrebbe anche $b = 0$), per cui dalla seconda uguaglianza, semplificando per a, si ricava $b = 1/b = \pm 1$. La prima uguaglianza fornisce allora l'unica possibilità $b = -1$, $a = 1/2$.

21. Risposta **D)**. È facile convincersi che i numeri cercati possono iniziare solo con una fra le cifre 1, 2 o 3 e, se contengono la cifra 0, questa non può che occupare la seconda posizione. A questo punto se ne può fare l'elenco: sono ammissibili solo 101123, 112358, 202246, 303369.

22. Risposta **E)**. A meno di rotazioni del cubo, esistono solo due diverse colorazioni. Se le tre facce verniciate di rosso (e quindi le tre verniciate di blu) hanno un vertice in comune, i cubetti con facce diversamente colorate sono 12; con l'altra colorazione sono 16.

23. Risposta **D)**. La presenza del fattore primo 13 e l'assenza del successivo fattore primo 17 indica che k deve essere compreso fra 13 e 16, estremi inclusi. La presenza della 15-ma potenza di 2 indica che deve essere proprio $k = 16$.

24. Risposta **D)**. I centri delle tre circonferenze sono i vertici di un triangolo di lati 3, 4 e 5 (la distanza tra i centri di due circonferenze tangenti esternamente è infatti la somma dei raggi): poiché $3^2 + 4^2 = 5^2$, tale triangolo è rettangolo con l'angolo retto nel centro della circonferenza di lato 1. A tale circonferenza va dunque sottratto un arco di 90 gradi, cioè un quarto della sua lunghezza.

25. Risposta **A)**. Dalle uguaglianze valide per ipotesi $5 + A + B + C = 12 + D + E = 5 + A + D + E = 9 + A + B + D = 12 + B + C = 8 + C + E$ si ricava facilmente $A = 7$ e quindi $B + D = C + E - 8$. Sulla base dei dati ne segue l'unica possibilità $B + D = 6$.

26. Risposta **B)**. Scomponendo $3^{32} - 1$ in $(3^{16} + 1)(3^8 + 1)(3^4 + 1)(3^4 - 1)$, si ottiene che gli ultimi due fattori valgono rispettivamente 82 e 80. D'altra parte, il testo assicura già che ve ne sono solo due con la proprietà richiesta.

27. Risposta **B)**. È facile vedere che il primo valore di k in corrispondenza al quale una k-piramide possiede sfere non esterne è 5: in questo caso vi è una sola sfera non esterna, che costituisce una 1-piramide. Induttivamente, è

facile convincersi che le sfere non esterne di una 8-piramide costituiscono una (8 - 4)-piramide.

28. Risposta **C**). 10 diagonali tutte "ascendenti da sinistra a destra" possono essere tracciate, rispettando il vincolo, per esempio nel modo seguente: una in ognuna delle 4 caselle della prima e dell'ultima riga, una nell'ultima casella della seconda riga e una nella prima casella della terza. È facile convincersi del fatto che 10 è il numero massimo possibile: basta osservare, per esempio, che il complesso delle prime due righe (indipendentemente da come vengono tracciate le diagonali nella terza) non ne può ospitare più di cinque, in quanto almeno tre caselle devono restare libere.

29. Risposta **A).** Tra le sequenze ordinate ammissibili di salti ve ne sono:

- 1 che non contiene salti da tre metri;
- 8 che contengono esattamente un salto da tre metri;
- 15 che contengono esattamente due salti da tre metri;
- 4 che contengono esattamente tre salti da tre metri;
- 0 che contengono più di tre salti da tre metri.

30. Risposta **E).** I triangoli CPD e BQA sono entrambi equilateri di lato 1 e quindi di altezza $\sqrt{3}/2$. La distanza di Q dal lato CD vale dunque $1 - \sqrt{3}/2$, per cui la lunghezza di PQ è $\sqrt{3}/2 - (1 - \sqrt{3}/2) = \sqrt{3} - 1$.