Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) Denotiamo con n un numero intero maggiore di 1 e supponiamo che n punti di una circonferenza siano numerati da 1 a n in un ordine del tutto casuale. Per ogni coppia (non ordinata) di punti adiacenti si consideri il valore assoluto della differenza dei due numeri corrispondenti; si sommino quindi tutti i valori assoluti così ottenuti. Quanto vale al minimo questa somma ?

S2. (*7 punti*) Siano p e q due numeri primi, diversi fra loro ed entrambi diversi da 2, tali che non ci sia alcun numero primo strettamente compreso tra p e q. È vero che $p + q$ è il prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1 (non necessariamente diversi tra loro)? In caso di risposta affermativa danne una motivazione, in caso di risposta negativa trova un contro-esempio.

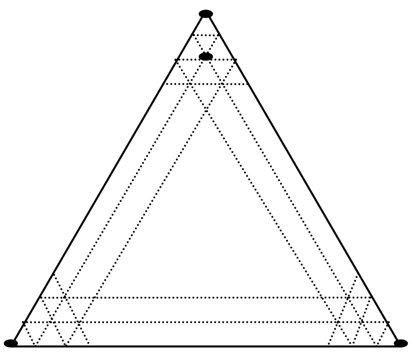
S3. (*11 punti*) Considera, in un poligono regolare di 9 lati, la lunghezza delle diagonali più lunghe e quella delle diagonali più corte. Se il lato del poligono misura 1 centimetro, quanto vale la differenza di queste due lunghezze?

S4. (*14 punti*) Tutti i punti di un piano sono colorati o in rosso o in blu e c'è almeno un punto rosso ed almeno un punto blu. Considera le due configurazioni proposte qui di seguito.

a. Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente un punto blu.
b. Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente due punti blu.

È possibile che si verifichi a)? È possibile che si verifichi b)? Motiva le tue risposte.

S5. (*18 punti*) Quattro numeri interi a, b, c, d, con a non nullo, sono scelti in modo che l'insieme E dei numeri interi positivi n tali che $an + b$ divide $cn + d$ non sia finito. L'insieme E può essere diverso dall'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri interi positivi? Motiva la risposta.



S6. (*22 punti*) Un triangolo equilatero di lato n (n intero maggiore di 1) è suddiviso in n^2 "piccoli" triangoli equilateri utilizzando segmenti paralleli ai lati, come suggerito dalla figura. A tutti i punti della rete (vertici dei triangoli) che viene così realizzata è inizialmente associato il numero 0, tranne ai quattro punti marcati con •, cui è associato il numero 1. Vogliamo fare in modo che a tutti i suddetti punti, compresi questi ultimi quattro, finisca per essere associato il numero 0 dopo aver eseguito un numero finito di mosse, ciascuna esclusivamente del tipo seguente: sommare 1 o -1 simultaneamente a ciascuno dei numeri nei quattro vertici di un qualunque rombo che sia formato dall'unione di due degli n^2 triangoli equilateri "piccoli". Per quali valori di n è possibile realizzare il progetto (e con quale strategia) ?

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) Denotiamo con n un numero intero maggiore di 1 e supponiamo che n punti di una circonferenza siano numerati da 1 a n in un ordine del tutto casuale. Per ogni coppia (non ordinata) di punti adiacenti si consideri il valore assoluto della differenza dei due numeri corrispondenti; si sommino quindi tutti i valori assoluti così ottenuti. Quanto vale al minimo questa somma ?

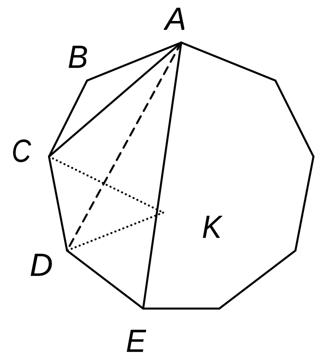
Soluzione: $2n - 2$.
Il punto 1 e il punto n ripartiscono la circonferenza in due archi: per ciascuno di essi la somma dei valori assoluti che ci interessano non può essere inferiore a $n - 1$, quindi la somma totale non può essere minore di $2n - 2$. D'altra parte, questo valore viene realizzato quando la numerazione viene effettuata rispettando il verso orario o antiorario dei punti. Ci sono però casi in cui la somma risulta maggiore: ad es. se $n = 4$ e si assegnano ai punti i numeri 1, 3, 2, 4 in verso orario, le somme sono del tipo: $(3 - 1) + (3 - 2) + (4 - 2) + (4 - 1) = 8 > 6 = 2x4 - 2$.

S2. (*7 punti*) Siano p e q due numeri primi, diversi fra loro ed entrambi diversi da 2, tali che non ci sia alcun numero primo strettamente compreso tra p e q. È vero che $p + q$ è il prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1 (non necessariamente diversi tra loro)? In caso di risposta affermativa danne una motivazione, in caso di risposta negativa trova un contro-esempio.

Soluzione: è vero.
Nelle nostre ipotesi $p + q$ è pari: se non potesse essere scritto come prodotto di almeno tre numeri interi positivi maggiori di 1, sarebbe della forma $2r$ con r numero primo. Ma allora r sarebbe un numero primo strettamente compreso tra p e q (essendone la media aritmetica).

S3. (*11 punti*) Considera, in un poligono regolare di 9 lati, la lunghezza delle diagonali più lunghe e quella delle diagonali più corte. Se il lato del poligono misura 1 centimetro, quanto vale la differenza di queste due lunghezze?

Soluzione: 1 centimetro.



In base alla formula sugli angoli interni di un poligono regolare, l'angolo *ABC* misura 180×7/9 = 140 gradi (e quindi *CAB* ne misura 20), mentre l'angolo *EAB*, che per motivi di simmetria è uguale all'angolo *DEA*, misura (180×3-140×3)/2 = 60 gradi. Sia ora *K* il punto di *AE* tale che *AK* = *AC* : nel triangolo isoscele *KAC*, l'angolo *ACK* misura (180 - 40)/2 = 70 gradi. Dunque *CK* è perpendicolare a *BC* e quindi anche a *DA*, che gli è parallelo. Allora *AD* è asse di *CK*, per cui il triangolo *CDK* è isoscele; ne segue che i due angoli alla base misurano entrambi 50 gradi, quello al vertice 80 gradi e quindi *KDE* misura 60 gradi come *DEK* : il triangolo *DEK* è dunque equilatero e la lunghezza di *EK* è 1 centimetro.

S4. (*14 punti*) Tutti i punti di un piano sono colorati o in rosso o in blu e c'è almeno un punto rosso ed almeno un punto blu. Considera le due configurazioni proposte qui di seguito.

a. Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente un punto blu.
b. Ogni circonferenza di raggio 1 centimetro giacente sul piano contiene esattamente due punti blu.

È possibile che si verifichi a)? È possibile che si verifichi b)? Motiva le tue risposte.

Soluzione: la a) non è possibile.

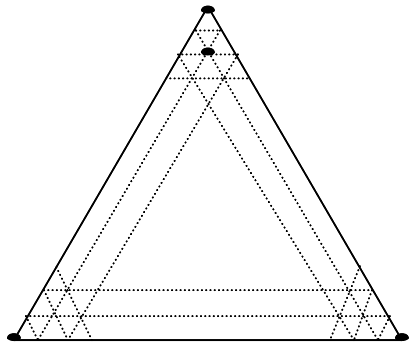
Infatti sia *B* un punto blu: sulla circonferenza di centro *B* e raggio 1 centimetro dovrebbe trovare posto un altro punto blu, diciamo B'. Allora sulla circonferenza di raggio 1 centimetro, centrata nel terzo vertice di un triangolo equilatero che ha per primi due vertici B e B', ci sarebbero almeno due punti blu: B e B'.

La b) invece è realizzabile.

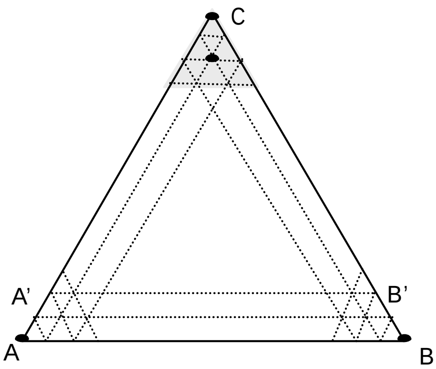
Si colorino di blu una retta fissata e tutte le rette ad essa parallele che distino 2 centimetri dalla più vicina retta blu; si colori di rosso il resto del piano. Una circonferenza di raggio 1 centimetro o ha centro equidistante da due di queste rette e quindi risulta ad esse tangente (e i punti di tangenza sono i due punti blu), oppure interseca solo una di queste rette, esattamente in due punti (che sono ovviamente i suoi unici punti blu).

S5. (*18 punti*) Quattro numeri interi a, b, c, d, con a non nullo, sono scelti in modo che l'insieme E dei numeri interi positivi n tali che $an + b$ divide $cn + d$ non sia finito. L'insieme E può essere diverso dall'insieme **N** dei numeri interi positivi? Motiva la risposta.

Soluzione: no.
Se $an + b$ divide cn +d allora divide anche $a(cn + d)$ e $c(an + b)$ e quindi la loro differenza $ad - bc$. Se an +b divide $ad - bc$ per infiniti n, deve risultare $ad - bc = 0$: deve quindi esistere un intero positivo k tale che $b = ak$ e $d = ck$. Sostituendo tali espressioni nel rapporto tra $cn + d$ e $an + b$, si trova che il rapporto vale costantemente c/a al variare comunque di n: quindi, se anche per un solo n tale rapporto è un intero, lo è per tutti gli n.



S6. (*22 punti*) Un triangolo equilatero di lato n (n intero maggiore di 1) è suddiviso in n^2 "piccoli" triangoli equilateri utilizzando segmenti paralleli ai lati, come suggerito dalla figura. A tutti i punti della rete (vertici dei triangoli) che viene così realizzata è inizialmente associato il numero 0, tranne ai quattro punti marcati con •, cui è associato il numero 1.
Vogliamo fare in modo che a tutti i suddetti punti, compresi questi ultimi quattro, finisca per essere associato il numero 0 dopo aver eseguito un numero finito di mosse, ciascuna esclusivamente del tipo seguente: sommare 1 o -1 simultaneamente a ciascuno dei numeri nei quattro vertici di un qualunque rombo che sia formato dall'unione di due degli n^2 triangoli equilateri "piccoli". Per quali valori di n è possibile realizzare il progetto (e con quale strategia) ?



Soluzione: solo per n dispari.
Se n è dispari, in due mosse è possibile spostare 1 da A in A' (si veda la figura); similmente si sposta 1 da B in B'. Dunque in $2(n-3)$ mosse questi "1" passano nei vertici in basso del triangolo evidenziato in grigio e in 4 ulteriori mosse tutti gli "1" vengono concentrati nel rombo superiore. Possono quindi venire azzerati con un'ultima mossa.
Se invece n è pari il progetto non può essere realizzato. Infatti coloriamo i punti della rete con i quattro colori a, b, c, d in modo che, per ogni rombo, i suoi vertici abbiano colori a due a due diversi, per esempio nel modo seguente: alterniamo i colori a e b, partendo da a, sul lato orizzontale del triangolo "grande", i colori c e d sul segmento parallelo adiacente, di nuovo i colori a e b sul segmento parallelo al livello superiore e così via. Se n è pari, tutti i tre vertici A, B, C del triangolo "grande" di partenza vengono colorati con a, mentre il rimanente punto, cui è associato il numero 1, viene colorato con b. Complessivamente, la somma dei numeri associati ai punti colorati con a vale 3, la somma dei numeri associati ai punti colorati con b vale 1, la somma dei numeri associati ai punti colorati con c o con d vale 0. Poiché ogni mossa altera ognuna di queste somme di 1, è chiaro che le prime due somme non potranno mai essere rese uguali fra loro.