



Kangourou Italia
Gara del 17 marzo 2005
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza superiore



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. A Kangourou 2004, Elena nella sua scuola si è classificata al cinquantesimo posto. Il suo posto è il cinquantesimo anche partendo dalla coda della classifica. Quanti studenti di quella scuola hanno partecipato alla gara?

- A) 99 B) 75 C) 103 D) 100 E) 101

2. Per svolgere un compito, i 18 studenti di una classe sono ripartiti in coppie e le coppie sono numerate da 1 a 9. Le coppie contrassegnate da un numero pari sono costituite da un maschio e da una femmina, mentre quelle contrassegnate da un numero dispari sono costituite solo da maschi. Quanti maschi vi sono in quella classe?

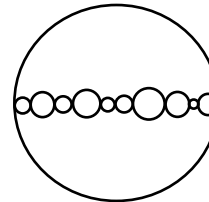
- A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 18

3. 10 monete da 1 euro sono disposte sul tavolo. Presa una di queste monete, quante sono al massimo le monete che si possono disporre attorno ad essa in modo che la tocchino, ma non vi siano sovrapposizioni fra monete?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Junior

4. La circonferenza grande in figura è lunga 10 m. Le 10 circonferenze piccole hanno i centri allineati su un diametro della circonferenza grande. Le due circonferenze piccole più esterne sono tangenti internamente alla circonferenza grande; ciascuna delle altre è tangente esternamente alle due ad essa contigue. Quanto vale la somma delle misure delle circonferenze piccole?



- A) 1 m B) 5 m C) 10 m D) 100 m
 E) dipende dal diametro delle singole circonferenze



5. Angelo è in grado di gonfiare 8 palloncini ogni 3 minuti, ma uno su 10 scoppia appena è stato gonfiato. Qual è il massimo numero di palloncini gonfiati che Angelo potrà fornire in due ore?

- A) 160 B) 216 C) 240 D) 288 E) 320

6. Quale numero devi collocare nella casella contrassegnata con x se vuoi completare la tabella in modo che in ogni riga, in ogni colonna e sulle due diagonali i numeri siano in progressione aritmetica? (I numeri di una sequenza formano una progressione aritmetica quando la differenza fra ogni numero e il precedente è costante.)

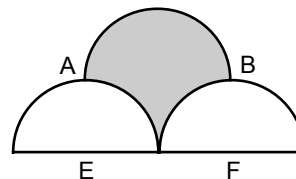
				21
	16			
		27		
				x

- A) 49 B) 42 C) 33 D) 28 E) 4

7. Una ditta ha ricevuto un'ordinazione per fabbricare mattoni a forma di parallelepipedo rettangolo. Le dimensioni richieste erano $10\text{ cm} \times 12\text{ cm} \times 14\text{ cm}$, ma, per errore, i mattoni prodotti sono risultati di dimensioni $12\text{ cm} \times 14\text{ cm} \times 16\text{ cm}$. Di quale percentuale, rispetto al volume del mattone ordinato, è superiore il volume del mattone fabbricato?

- A) 20% B) 30% C) 40% D) 50% E) 60%

8. In figura sono disegnate 3 semicirconferenze aventi raggio 2 cm; i centri E ed F delle due semicirconferenze inferiori, le quali sono tangenti, sono le proiezioni ortogonali rispettivamente dei punti A e B di intersezione della semicirconferenza superiore con le altre due. Quanto misura in cm^2 l'area della regione ombreggiata?



- A) 2π B) 7 C) $2\pi+1$ D) 8 E) $2\pi+2$

9. Qual è la media aritmetica dei numeri decimali periodici $2,00(4)$ e $2,00(5)$?

- A) 2,0045 B) 2,00(45) C) 2,005 D) 2,0054 E) 2,00(54)

10. Quante sono le coppie di numeri interi positivi m, n (con $m > n$) tali che $m^2 = n^2 + 17$?

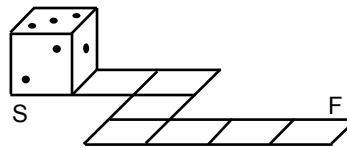
- A) nessuna B) una C) due D) quattro E) infinite

Junior



I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. La somma dei punti sulle facce opposte di un dado è sempre 7. Un dado rotola lungo il percorso mostrato in figura. Nella posizione iniziale (S) sulla faccia superiore del dado si legge 3. Che cosa si legge sulla faccia superiore quando il dado è nella posizione finale (F)?



- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. In un'urna vi sono 17 palline numerate da 1 a 17. Hai la possibilità di effettuare un'unica estrazione di un numero di palline a tua scelta. Se vuoi essere certo che, fra le palline che estrai, ve ne siano almeno due la somma dei cui numeri sia 18, quante ne devi estrarre?

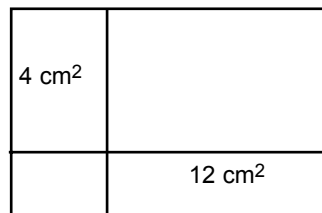
- A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 17

13. Carlo è un tipo strano: in ogni singolo giorno o mente sempre o dice sempre la verità, alternando il suo comportamento al variare dei giorni. Oggi egli ha fatto 4 delle seguenti 5 affermazioni. Quale non può avere fatto?

- A) Il numero dei miei amici è un numero primo.
 B) I miei amici sono tanti quante le mie amiche.
 C) Io mi chiamo Carlo.
 D) Io dico la verità in tutti i giorni della mia vita.
 E) Tra i miei amici e le mie amiche, tre sono più vecchi di me.

Junior

14. Un rettangolo è diviso in 4 rettangoli più piccoli da due segmenti paralleli ai lati. Se, come indicato in figura, due rettangoli hanno area rispettivamente 4 cm^2 e 12 cm^2 , quale delle seguenti coppie di numeri può esprimere l'area in cm^2 dei restanti due rettangoli?



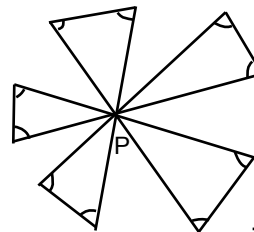
- A) 3 e 10 B) 5 e 15 C) 6 e 16 D) 3 e 16
 E) 6 e 9

15. Il prodotto di 22 numeri interi è 1. Quale dei seguenti numeri può essere la loro somma?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 4 E) nessuno di questi

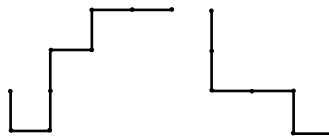


16. Cinque diverse rette passano per uno stesso punto P e su ciascuna di esse sono fissati due punti, diversi da P e da parti opposte rispetto a P: i cinque triangoli in figura sono ottenuti congiungendo opportunamente i dieci punti in questione. Quanti gradi misura la somma dei dieci angoli evidenziati in figura?



- A) 300 B) 450 C) 360
D) 600 E) 720

17. In figura sono rappresentati due pezzi di filo di ferro. Ognuno è composto di segmenti aventi tutti lunghezza 10 cm. Uno dei due pezzi viene parzialmente sovrapposto all'altro in modo che essi vengano ad avere un tratto in comune. Quanti possono essere al massimo i segmenti che compongono tale tratto?



- A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 1

18. Alla sequenza di 7 lettere AGONKRU è associata una sequenza di 7 cifre tutte diverse fra loro, poste in ordine crescente fino alla cifra corrispondente alla lettera N e decrescente da lì in poi. Ogni sequenza scelta è un codice rispettando il quale alla parola KANGOUROU viene associato un numero. Qual è il massimo numero che si può ottenere per la parola KANGOUROU al variare dei codici ammissibili?

- A) 859763473 B) 987654354 C) 569784384
D) 859673473 E) 569783483

19. Un rettangolo lungo 24 cm e largo 1 cm viene ripartito in rettangoli larghi 1 cm. Di essi quattro sono lunghi 4 cm, due sono lunghi 3 cm e uno è lungo 2 cm. Questi rettangoli sono accostati (senza che si sovrappongano) in modo da formare un altro rettangolo. Allora la lunghezza in cm del perimetro del nuovo rettangolo è almeno

- A) 28 B) 18 C) 22 D) 20 E) nessuno dei precedenti

20. Una sequenza di numeri è definita nel modo seguente: $a_1 = 2005$, $a_2 = 21$ e, per ogni $n > 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Allora a_{2005} vale

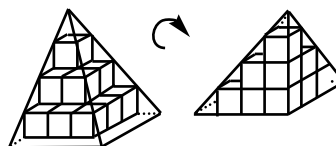
- A) 2005 B) 21 C) 1984 D) 2004 E) 0



I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

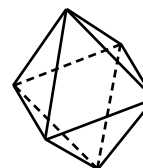
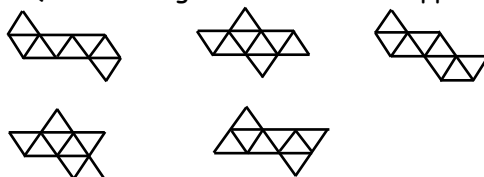
21. A una fermata d'autobus passano solo l'autobus A (regolarmente ogni 3 minuti) e l'autobus B (regolarmente ogni 5 minuti). Se sto alla fermata esattamente 19 minuti e conto il numero totale di autobus che passano nel frattempo, quanti risultati diversi tra loro posso ottenere?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22. 14 cubi di volume 1 sono accatastati come indicato nella figura. La costruzione ottenuta viene racchiusa in una piramide, sempre come indicato nella figura. Qual è il volume di questa piramide?



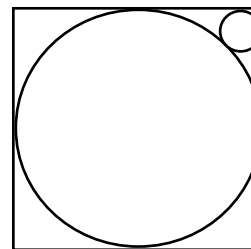
- A) 64 B) $32\sqrt{2}$
 C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{64}{3}$ E) $\frac{32}{3}$

23. Quale dei seguenti non è lo sviluppo di un ottaedro?



Junior

24. La figura rappresenta un quadrato e due circonferenze. Il quadrato è circoscritto alla circonferenza grande, che ha raggio 1 ed è tangente esternamente alla circonferenza piccola, cui sono tangenti due lati del quadrato. Quanto misura il raggio della circonferenza piccola?



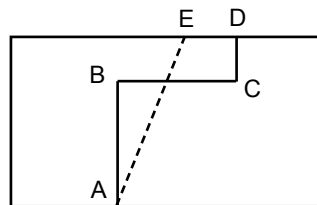
- A) $3 - 2\sqrt{2}$ B) $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2} - 1$ E) $4 + 3\sqrt{2}$

25. Quanti numeri interi positivi n soddisfano entrambe le disuguaglianze $2000 < \sqrt{n(n+1)} < 2005$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



26. Un rettangolo è suddiviso in due regioni dalla spezzata ABCD, come indica la figura. I segmenti AB, BC e CD sono paralleli a lati del rettangolo e le loro lunghezze in metri sono, rispettivamente, 30, 24 e 10. Sia E un punto del lato superiore del rettangolo tale che l'area di ciascuno dei trapezi in cui AE suddivide il rettangolo coincide con quella della regione iniziale che contiene gli stessi vertici del rettangolo. Quanto dista in metri E da D?

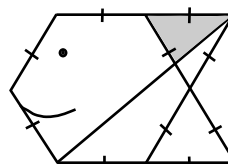


- A) 8 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

27. Quanti divisori (interi positivi) di 4 cifre ha il numero 102^2 ?

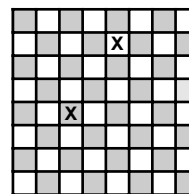
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28. 10 fiammiferi di uguale lunghezza sono disposti un modo da rappresentare un pesce, come indicato nella figura. L'area della regione occupata dal pesce vale 24. Quanto vale l'area del triangolo ombreggiato, delimitato utilizzando il segmento tracciato in figura fra due dei "vertici" del pesce?



- A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

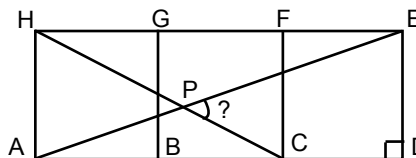
29. In quanti modi si può scegliere, su una scacchiera tradizionale 8x8, una coppia di caselle, una bianca e una nera, in modo che tali caselle non giacciono né sulla stessa riga né sulla stessa colonna?



- A) 56 B) 5040 C) 720 D) 672 E) 768

Junior

30. Tre quadrati sono accostati come in figura. I segmenti AE e CH si intersecano nel punto P. Quanto misura l'angolo CPE?



- A) 30° B) 45°
 C) 60° D) 50° E) 40°



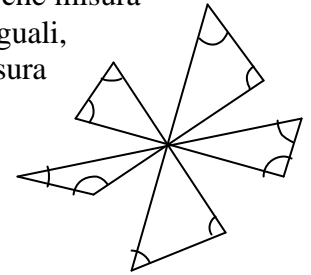
SOLUZIONE DEI QUESITI PER LA CATEGORIA JUNIOR 2005

1. (A) Vi sono esattamente 49 concorrenti prima di Elena e altrettanti dopo.
2. (D) Vi sono esattamente 4 coppie contrassegnate da un numero pari, dunque esattamente 4 femmine.
3. (B) Quando due circonferenze di uguale raggio sono tangenti, le due rette condotte dal centro di una delle due e tangenti all'altra formano un angolo di 60° (infatti il triangolo rettangolo avente per vertici i centri delle due circonferenze e uno dei punti di tangenza presenta un angolo di 30° in corrispondenza del centro da cui sono condotte le rette). Contare le monete tangenti a quella centrale significa quindi contare le monete viste dal centro della moneta centrale sotto un angolo di 60° : dovendo essere non sovrapposte esse sono esattamente $360 : 60 = 6$.
4. (C) La somma dei raggi r_1, \dots, r_{10} delle 10 circonferenze piccole è uguale al raggio r della circonferenza grande, poiché lo è la somma dei diametri. Allora
$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \dots + 2\pi r_{10} = 2\pi(r_1 + r_2 + \dots + r_{10}) = 2\pi r = 10.$$
5. (D) In due ore Angelo gonfia $(120 : 3) \times 8 = 320$ palloncini; di questi ne scoppiano 32.
6. (B) La ragione della progressione sulla diagonale "discendente" è $27 - 16 = 11$, per cui nella casella sotto a quella indicata con x andrà collocato 49. La ragione sull'ultima colonna è allora $(49 - 21) : 4 = 7$, per cui al posto di x va $49 - 7 = 42$.
7. (E) Due dei tre spigoli misurano quanto richiesto, il terzo misura il 60% in più. Anche il volume allora cresce del 60%.
8. (D) La regione ombreggiata ha la stessa area del rettangolo ABEF.
9. (C) Sommando i due numeri si ottiene $4,00(9) = 4,01$ che, diviso per 2, dà 2,005.
10. (B) Deve essere $17 = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$. Poiché 17 è un numero primo e deve essere $0 < n < m$, l'unica possibilità è che sia $m + n = 17$ e $m - n = 1$. Questo sistema ha l'unica soluzione $m = 9, n = 8$.
11. (E) Poiché i passi da fare non sono molti, conviene scrivere direttamente la sequenza dei punteggi riportati passo dopo passo sulla faccia superiore del dado: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4, 6.
12. (B) Vi sono 8 coppie non ordinate di interi fra 1 e 17 che sommati danno 18, e questi interi sono tutti diversi fra loro, dunque sono 16 in tutto. Se si estraggono 9 numeri, può accadere che uno sia 9 e che ve ne sia uno per ognuna di queste coppie. Se se ne estraggono 10, necessariamente fra questi si devono ritrovare entrambi gli interi di una coppia di cui sopra.
13. (C) Infatti C è un'affermazione vera, D è falsa: quindi, a seconda della giornata, Carlo non può dire una delle due. D'altra parte, le restanti frasi sono contraddittorie (Carlo dice di avere almeno tre amici (E), di avere un numero primo di amici (A) e quindi un numero dispari di amici, poiché ne ha più di 2 che sarebbe l'unico pari primo, e di avere un ugual numero di amici e di amiche (B) e quindi un numero pari di amici di ambo i sessi). Dunque non è in giornata di verità.

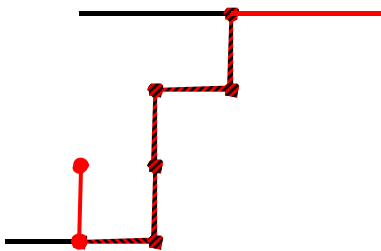
14. (D) Il prodotto delle quattro misure (eventualmente coincidenti) dei lati dei rettangoli di cui si conoscono le aree coincide con il prodotto delle due aree, dunque vale 48. Le quattro misure dei lati, diversamente accoppiate, sono le stesse per i due rettangoli rimanenti, il prodotto delle cui aree deve dunque valere 48: solo la coppia D) soddisfa questo requisito.

15. (E) Trattandosi di numeri interi, ognuno di essi deve essere 1 o -1; inoltre quelli uguali a -1 devono essere in quantità pari: dunque la somma è congrua a 2 modulo 4. È facile allora escludere tutte le risposte da A) a D).

16. (E) Gli angoli appartenenti ai triangoli e non evidenziati hanno somma che misura 180° , poiché le cinque rette dividono il piano in 10 angoli a due a due uguali, uno dei quali appartiene a un triangolo e l'altro a nessuno. Quindi la misura degli angoli evidenziati è pari a $180^\circ \times 5 - 180^\circ = 720^\circ$.

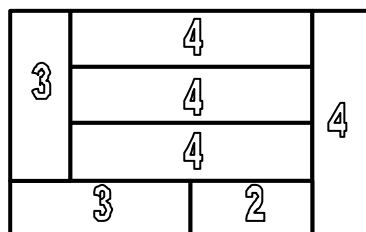


17. (B) La figura mostra che effettivamente possono essere 5, mentre chiaramente non possono essere 7.



18. (D) Naturalmente dovrà essere $N = 9$; quindi K, A, G, O e U dovranno assumere, nell'ordine, i valori più alti possibile, compatibilmente con la regola imposta. Ne viene: $K = 8, A = 5, G = 6, O = 7, R = 4, U = 3$.

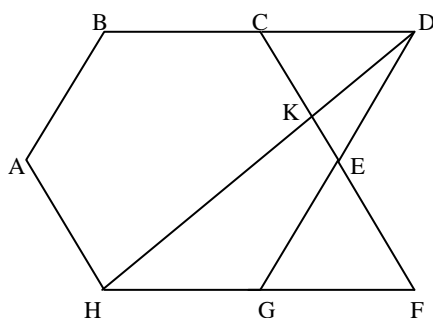
19. (D) Le lunghezze (in cm) dei lati del nuovo rettangolo sono numeri interi e il loro prodotto è 24: possono dunque essere 1 e 24, oppure 2 e 12, oppure 3 e 8, oppure 4 e 6, portando il perimetro ad essere (in cm) rispettivamente 50, 48, 22, 20. Si può constatare che questo ultimo caso è effettivamente realizzabile con i "tasselli" a disposizione.



20. (A) Da $a_n = a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-2} = -a_{n-3}$ segue $a_n = a_{n-6}$ per ogni n . Poiché $2005 = 334 \times 6 + 1$, si ha $a_{2005} = a_1$.

21. (C) In un intervallo di 19 minuti possono passare o 6 o 7 autobus A (7 se e solo se ne passa uno entro il primo minuto di attesa) e o 3 o 4 autobus B (4 se e solo se ne passa uno entro i primi 4 minuti di attesa). Le diverse somme possibili sono dunque 9, 10 e 11.
22. (D) Anche il lato di ogni cubo misura 1. Per costruzione allora, la piramide ha altezza 4 e base quadrata di lato 4.
23. Annullato per errore di stampa nell'elencazione delle risposte. Tutti quelli presentati sono possibili sviluppi di un ottaedro.
24. (A) La semi-diagonale del quadrato misura $\sqrt{2}$. Detto r il raggio cercato, si ha allora

$$r + r\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1, \text{ da cui } r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$
25. (E) I numeri in questione sono tutti e soli gli interi fra 2.000 e 2.004 inclusi.
26. (B) Chiamiamo H il punto di intersezione fra la retta contenente il segmento AB e il lato orizzontale superiore del rettangolo. Chiaramente l'area del rettangolo $BHDC$ deve essere uguale all'area del triangolo AHE . Detta x la lunghezza di ED , si deve avere allora
 $(30 + 10)(24 - x)/2 = 240$, da cui $x = 12$.
27. (D) La fattorizzazione di 102^2 in numeri primi è $102^2 = 17^2 \times 3^2 \times 2^2$. Poiché $17 \times 9 \times 4$ è un numero di 3 cifre, tutti i divisori cercati devono essere multipli di $17^2 = 289$, cioè della forma $17^2 \times 3^h \times 2^k$ con h e k compresi tra 0 e 2. Di questi 9 numeri, 4 non sono accettabili perché non hanno 4 cifre: 289 , 289×2 , 289×3 e $102^2 > 100^2$.
28. (C) I triangoli CDK e FHK sono simili (infatti gli angoli in F e C misurano 60° e gli angoli in K sono uguali) con le misure dei lati che stanno nel rapporto 1: 2. Allora CK è lungo la metà di KF e dunque il doppio di KE (infatti CF è lungo quanto due fiammiferi). L'area del triangolo CDK (quella cercata) è dunque $2/3$ dell'area di un triangolo equilatero di lato un fiammifero. È facile vedere che il pesce è costituito accostando 8 di tali triangoli (un esagono regolare unito a due triangoli), ciascuno dei quali viene dunque ad avere area 3.



29. (E) Le caselle nere sono 32: ciascuna di esse può venire accoppiata con una delle $32 - 8 = 24$ caselle bianche che non stanno né sulla sua riga né sulla sua colonna (in questo modo tutti gli accoppiamenti possibili vengono considerati una e una sola volta).

30. (B) Accostiamo a quelli dati altri tre quadrati, come in figura. Poiché i triangoli AKJ e KEI sono congruenti, l'angolo EKA è retto e dunque il triangolo AEK è la metà di un quadrato. L'angolo KAE misura allora 45° : lo stesso vale per l'angolo CPE , in quanto HC è parallelo a AK .

