Kangourou della Matematica 2005
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2005

LIVELLO ÈCOLIER

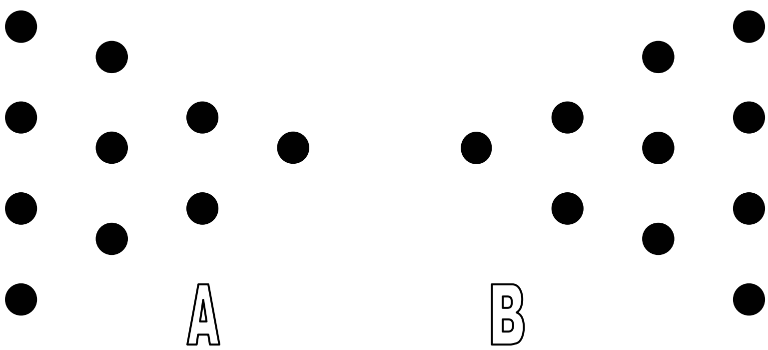
E1. (*5 punti*) Nella via in cui abito le case sono numerate da un lato con i numeri dispari consecutivi, cominciando da 1, e dall'altro lato con i numeri pari (ogni numero denota una sola casa). La mia casa ha il numero 137. Se la numerazione fosse iniziata all'altra estremità della strada, la mia casa avrebbe il numero 85. Quante case vi sono in tutto sullo stesso lato della mia?

E2. (*7 punti*) Esattamente un anno fa il mio era un peso compreso tra 90 e 95 kg; ora sono dimagrito, perdendo una quantità di peso compresa tra 3 e 4 kg. Con queste indicazioni, dimmi:

a) al di sotto di quale peso non posso essere sceso?
b) al di sopra di quale peso non posso più essere?

E3. (*11 punti*) Qual è il più piccolo numero intero positivo di 4 cifre, tutte diverse fra loro (e diverse da zero), che sia divisibile (senza resto!) per ciascuna delle sue 4 cifre?

E4. (*14 punti*) La maestra ti ha chiesto di disegnare su una pagina del tuo quaderno 10 pallini in modo da rappresentare una freccia da sinistra verso destra, come nella figura A. Tu, per errore, li hai disposti in modo da ottenere una freccia da destra verso sinistra, come nella figura B. Naturalmente non puoi capovolgere il quaderno, ma puoi cancellare dei pallini e ridisegnarli. Qual è il minimo numero di pallini che ti basta cancellare, e dove devi posizionare altrettanti nuovi pallini, per ottenere quanto ti ha chiesto la maestra? (Se vuoi, puoi tracciare una croce sui pallini da cancellare e segnare la posizione in cui collocare i nuovi utilizzando direttamente la figura B, spiegando come meglio credi il motivo per cui non puoi cancellarne di meno.)



E5. (*18 punti*) Tu e un tuo amico giocate al gioco seguente. Avete un mucchio iniziale di 5 monete: a turno prendete dal mucchio 1, 2 o 3 monete a vostra scelta, rispettando la regola che ogni giocatore, quando è il proprio turno, deve prendere almeno una moneta e, se vi è più di una moneta nel mucchio, non può prendere lo stesso numero di monete che ha preso l'avversario alla mossa precedente. Perde chi raccoglie l'ultima o le ultime monete disponibili. Se vuoi vincere ed entrambi giocate senza fare errori, ti conviene essere primo o secondo di mano? Rispondi motivando la risposta.

E6. (*22 punti*) Harry Potter si lamenta con tutti i suoi amici: "Ho perso il mio rettangolo magico. Come farò a partecipare a Kangourou?".
Gli amici gli chiedono come fosse fatto il rettangolo magico: "Di pergamena, ottenuto accostando (ma non sovrapponendo!) 10 rettangoli più piccoli, ciascuno dei quali ha i lati che misurano l'uno 2 pollici e l'altro 3 pollici".
Dopo una breve ricerca gli amici tornano ciascuno con un rettangolo di pergamena di forma diversa, ma con i requisiti indicati: Harry però asserisce che nessuno è il suo.
Quanti amici può avere al massimo Harry?

LIVELLO ÈCOLIER

E1. (*5 punti*) Nella via in cui abito le case sono numerate da un lato con i numeri dispari consecutivi, cominciando da 1, e dall'altro lato con i numeri pari (ogni numero denota una sola casa). La mia casa ha il numero 137. Se la numerazione fosse iniziata all'altra estremità della strada, la mia casa avrebbe il numero 85. Quante case vi sono in tutto sullo stesso lato della mia?

Soluzione: 111. Prima della mia casa vi sono 136 : 2 = 68 case, dopo ve ne sono 84 : 2 = 42. In totale le case sono 68 + 1 + 42 = 111.

E2. (*7 punti*) Esattamente un anno fa il mio era un peso compreso tra 90 e 95 kg; ora sono dimagrito, perdendo una quantità di peso compresa tra 3 e 4 kg. Con queste indicazioni, dimmi:

a) al di sotto di quale peso non posso essere sceso?
b) al di sopra di quale peso non posso più essere?

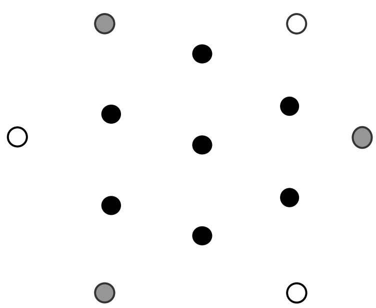
Soluzione: 86 Kg, 92 Kg. La migliore valutazione che puoi dare del mio peso attuale è che sia compreso fra il minimo di un anno fa meno la massima perdita di peso possibile, dunque 90 – 4 = 86 Kg, e il massimo di un anno fa meno la minima perdita possibile, dunque 95 – 3 = 92 Kg.

E3. (*11 punti*) Qual è il più piccolo numero intero positivo di 4 cifre, tutte diverse fra loro (e diverse da zero), che sia divisibile (senza resto!) per ciascuna delle sue 4 cifre?

Soluzione: 1236. Infatti, per confrontare due numeri di 4 cifre si comincia dalla cifra delle migliaia e solo se le due cifre sono uguali si passa alla cifra delle centinaia e così via; dunque perché il numero sia il più possibile piccolo bisogna scegliere come cifra delle migliaia 1: notiamo che l'altra condizione vale comunque, poiché ogni numero è divisibile per 1.
La cifra delle centinaia deve essere la più piccola possibile, ma diversa da 1: quindi 2. Allora il numero cercato deve essere pari.
La cifra delle decine deve essere la più piccola possibile, ma diversa da 1 e 2: quindi 3. Allora il numero cercato deve essere divisibile anche per 3.
La cifra delle unità deve essere pari e non inferiore a 4: ma 1234 non è divisibile per 3 (il quoziente è 411, ma il resto è 1) e quindi si deve passare alla cifra 6 che è accettabile.

E4. (*14 punti*) La maestra ti ha chiesto di disegnare su una pagina del tuo quaderno 10 pallini in modo da rappresentare una freccia da sinistra verso destra, come nella figura A. Tu, per errore, li hai disposti in modo da ottenere una freccia da destra verso sinistra, come nella figura B. Naturalmente non puoi capovolgere il quaderno, ma puoi cancellare dei pallini e ridisegnarli. Qual è il minimo numero di pallini che ti basta cancellare, e dove devi posizionare altrettanti nuovi pallini, per ottenere quanto ti ha chiesto la maestra? (Se vuoi, puoi tracciare una croce sui pallini da cancellare e segnare la posizione in cui collocare i nuovi utilizzando direttamente la figura B, spiegando come meglio credi il motivo per cui non puoi cancellarne di meno.)

Soluzione. Se immagini di ricalcare la figura B su un foglio trasparente e di trascinare il foglio, senza ruotarlo, finché la figura B si sovrappone almeno parzialmente alla A, il maggior numero di pallini che riuscirai a fare in modo che si sovrappongano è sette, tanti quanti i vertici e il centro di un esagono regolare. Tale esagono è la più grande figura speculare a se stessa contenuta in entrambe le configurazioni: dunque è la parte più grande della configurazione che può restare inalterata. Ti basta allora cancellare i tre pallini che qui a fianco sono vuoti e disegnare i tre pallini grigi.

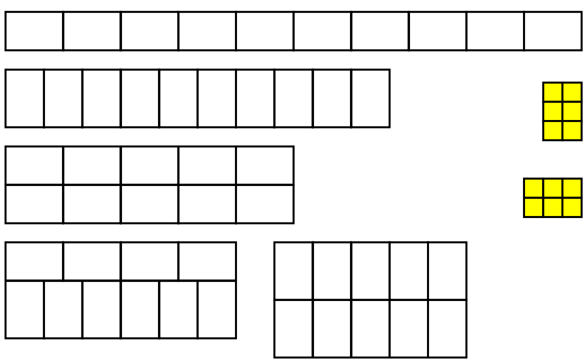


E5. (*18 punti*) Tu e un tuo amico giocate al gioco seguente. Avete un mucchio iniziale di 5 monete: a turno prendete dal mucchio 1, 2 o 3 monete a vostra scelta, rispettando la regola che ogni giocatore, quando è il proprio turno, deve prendere almeno una moneta e, se vi è più di una moneta nel mucchio, non può prendere lo stesso numero di monete che ha preso l'avversario alla mossa precedente. Perde chi raccoglie l'ultima o le ultime monete disponibili. Se vuoi vincere ed entrambi giocate senza fare errori, ti conviene essere primo o secondo di mano? Rispondi motivando la risposta.

Soluzione: secondo. Infatti se il primo di mano, chiamiamolo A, ne prende 3, il secondo, chiamiamolo B, ne può prendere 1; viceversa, se A ne prende 1, B ne può prendere 3: in entrambi i casi A resta con 1 e perde. Se A ne prende 2, B ne può prendere 1: allora A è nella condizione di non poterne prendere 1, ma di dover prendere entrambe le 2 rimanenti, lasciando quindi il tavolo sgombro.

E6. (*22 punti*) Harry Potter si lamenta con tutti i suoi amici: "Ho perso il mio rettangolo magico. Come farò a partecipare a Kangourou?".
Gli amici gli chiedono come fosse fatto il rettangolo magico: "Di pergamena, ottenuto accostando (ma non sovrapponendo!) 10 rettangoli più piccoli, ciascuno dei quali ha i lati che misurano l'uno 2 pollici e l'altro 3 pollici".
Dopo una breve ricerca gli amici tornano ciascuno con un rettangolo di pergamena di forma diversa, ma con i requisiti indicati: Harry però asserisce che nessuno è il suo.
Quanti amici può avere al massimo Harry?

Soluzione: 4. Infatti la superficie del rettangolo magico è 2x3x10 = 60 pollici quadrati. 60 si può scrivere come prodotto di interi in 6 modi diversi (1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12, 6x10), ma non tutti i rettangoli che hanno queste misure possono essere ottenuti accostando (ma non sovrapponendo) 10 rettangoli più piccoli del tipo indicato da Harry. Non può essere ottenuto in questo modo infatti il rettangolo di lati 1 e 60, mentre tutti gli altri 5 possono esserlo, come mostrano le figure qui sotto, in cui è anche evidenziata nei due rettangoli in grigio, la loro scomposizione in quadrati di lato 1 pollice.



Poiché gli amici hanno portato rettangoli tutti diversi tra loro, ma non quello di Harry, essi non possono essere più di 4.