**Kangourou Italia**
**Gara del 18 marzo 2004**
**Categoria Student**
**Per studenti di quarta o quinta superiore**

## I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti

**1.** Se si acquistano $m$ penne al costo di $n$ euro ciascuna e $n$ penne al costo di $m$ euro ciascuna, allora il costo medio in euro di ogni penna è:

A) 1 B) $(m + n)/2$ C) $2mn/(m+n)$ D) $mn$ E) $m^2 n^2/2$

**2.** Una piramide ha 17 facce. Quanti sono i suoi spigoli?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 32 E) 34

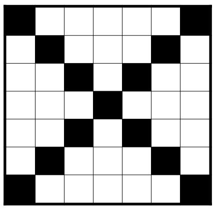
**3.** Il più piccolo numero reale x che verifica la disuguaglianza $x^2 - 2004 \leq 0$ è:

A) $-2004$ B) 2004 C) 0 D) $\sqrt{2004}$ E) $-\sqrt{2004}$

**4.** Quanti sono i vertici di un poligono regolare la somma dei cui angoli interni è uguale a un settimo della somma degli angoli interni di un 16-gono regolare?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 10

**5.** $s$ è un intero positivo dispari. In un quadrato di lato $s$ i quadratini di lato 1 centrati sulle diagonali sono stati dipinti di nero (vedi l'esempio in figura, dove $s = 7$). Qual è l'area della regione non dipinta?



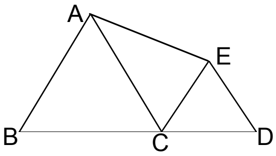
A) $s^2 + 1 - 2s$ B) $s^2 + 4 - 4s$
C) $2s^2 + 1 - 4s$ D) $s^2 - 1 - 2s$ E) $s^2 - 2s$

**6.** Per definizione, in un gruppo di persone una "*celebrità*" è una persona del gruppo che è conosciuta da ogni altra persona del gruppo, ma che non conosce alcuna altra persona del gruppo. Consideriamo un gruppo di 100 persone: al suo interno il numero delle celebrità

A) è necessariamente 0 B) è necessariamente 1
C) è necessariamente 0 o 1 D) è necessariamente 0 o 100
E) è necessariamente 1 o 2

**Student**

**7.** I due triangoli equilateri ABC e ECD nella figura hanno lati di lunghezza 2 e 1 rispettivamente. L'area del quadrilatero ABCE è:




A) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$ C) 3 D) $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

**8.** Cinque persone scelgono un numero fra questi tre: 1, 2, 4. I cinque numeri scelti vengono moltiplicati fra loro. Uno solo fra i numeri seguenti potrebbe essere il prodotto ottenuto: quale?

A) 100 B) 256 C) 768 D) 2048 E) 4096

**9.** In un pascolo vi erano 15 pecore e alcuni pastori. Dopo che metà dei pastori e un terzo delle pecore si sono allontanati dal pascolo, vi è un totale di 50 gambe. Quante erano inizialmente le gambe?

A) 60 B) 72 C) 80 D) 90 E) 100

**10.** Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza il cui centro cade all'interno del triangolo e il cui raggio è lungo quanto il lato CB. Quanto misura in gradi l'angolo CÂB?

A) 22,5° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

**I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti**

**11.** Considera il piano cartesiano. Quanti sono i quadrati aventi un vertice in (-1,-1) e tali che almeno uno degli assi coordinati sia asse di simmetria del quadrato stesso?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**12.** In una scatola non trasparente vi sono 100 carte, numerate da 1 a 100. Qual è il numero minimo di carte che dobbiamo estrarre al buio dalla scatola, per essere sicuri che il prodotto dei numeri che appaiono sulle carte estratte sia divisibile per quattro?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

**13.** Ogni marziano ha uno, due o tre tentacoli sulla propria testa. Esattamente l'1% della popolazione marziana consiste di individui con tre tentacoli, mentre il 97% consiste di individui con due tentacoli e il rimanente 2% ha un solo tentacolo. Quale percentuale di marziani ha più tentacoli sulla propria testa della media della totalità della popolazione marziana?

A) 1% B) 3% C) 97% D) 98% E) 99%

**14.** Quanti sono i numeri di due cifre i cui quadrati e i cui cubi terminano con la stessa cifra?

A) 1 B) 9 C) 18 D) 27 E) più di trenta

**15.** Quanti sono i numeri interi positivi che possono essere scritti nella forma $a_0 + 3\,a_1 + 3^2\,a_2 + 3^3\,a_3 + 3^4\,a_4$ con $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ appartenenti all'insieme {-1, 0, 1}?

A) 5 B) 80 C) 81 D) 121 E) 243

**16.** Il numero $\left(\sqrt{22+12\sqrt{2}}-\sqrt{22-12\sqrt{2}}\right)^2$ è

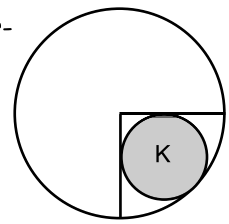
A) negativo B) uguale a zero C) la quarta potenza di un intero non nullo D) uguale a 11 E) un intero positivo divisibile per 5

**17.** Quanti sono i triangoli rettangoli i cui vertici sono tre tra i 14 vertici di un 14-gono regolare?

A) 72 B) 82 C) 84 D) 88 E) altra risposta

**18.** Una circonferenza K è inscritta nel settore circolare che è un quarto di un cerchio di raggio 6, come mostrato in figura. Qual è il raggio di K?

A) $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) 2,5 D) 3 E) $6\left(\sqrt{2}-1\right)$




**19.** In una successione geometrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ si hanno le seguenti disuguaglianze: $a_3 < a_2 < a_4$. Allora sicuramente

A) $a_3 \cdot a_4 > 0$ B) $a_2 \cdot a_3 < 0$ C) $a_2 \cdot a_4 < 0$ D) $a_2 < 0$ E) $a_2 \cdot a_3 > 0$

**20.** Qual è la penultima cifra di $11^{2004}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

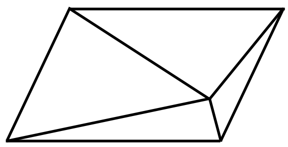
Student

**I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti**

**21.** In Ortolandia vi sono le elezioni. Ogni elettore del Partito dei Broccoli ha già mangiato broccoli, mentre il 90% degli elettori degli altri partiti non ha mai mangiato broccoli. Quale percentuale ha ottenuto il Partito dei Broccoli, se esattamente il 46% dei votanti ha già mangiato broccoli?

A) 40% B) 41% C) 43% D) 45% E) 46%

**22.** Un parallelogramma è suddiviso in 4 triangoli, seguendo un criterio analogo a quello mostrato in figura. Allora :



A) le aree dei quattro triangoli, in $m^2$ , possono essere 4, 5, 8, 9

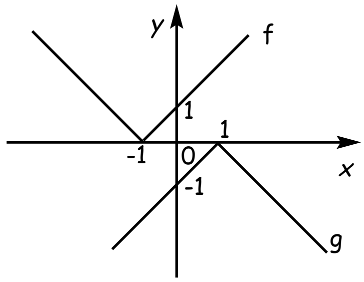
B) le aree dei quattro triangoli, in $m^2$ , possono essere 5, 6, 7, 12

C) le aree dei quattro triangoli, in $m^2$ , possono essere 10, 11, 12, 19

D) le aree dei quattro triangoli, in $m^2$ , possono essere: 11, 13, 15, 16

E) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

**23.** La figura mostra i grafici di due funzioni f e g, definite sui numeri reali. Quale delle seguenti uguaglianze è soddisfatta, per ogni numero reale x ?




A) $f(x) = -g(x) + 2$

B) $f(x) = -g(x) - 2$

C) $f(x) = -g(x+2)$

D) $f(x+2) = -g(x)$

E) $f(x+1) = -g(x-1)$

**24.** Un triangolo equilatero ha lato 4. Il raggio dell'arco di circonferenza, centrata in uno qualunque dei vertici, che suddivide il triangolo in due parti aventi la stessa area, è:

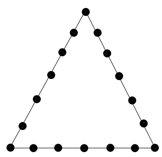
A) $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$ B) $\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}}$ C) $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\sqrt{\frac{48\sqrt{3}}{\pi}}$

**Student**

**25.** Partiamo con 200 numeri tutti uguali a zero scritti in successione. Al primo passaggio aggiungiamo 1 ad ognuno dei duecento numeri. Al secondo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di 2 (cioè a quelli di posto pari). Al terzo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di 3 e procediamo secondo questa legge: all'n-esimo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di n. Dopo 200 passaggi, che numero troviamo al posto 120?

A) 16 B) 12 C) 20 D)24 E) 32

**26.** Quanti sono i triangoli (non degeneri) i cui vertici sono 3 tra i 18 punti mostrati in figura?



A) 816 B) 711 C) 777 D) 717 E) 811

**27.** *a, b, c* sono tre cifre tali che $0 < a < b < c$. La somma di tutti gli interi di tre cifre che possono essere formati permutando queste tre cifre è 1554. Che cifra è *c* ?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

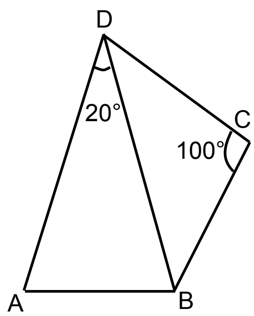
**28.** Il numero $n = 999 \dots 9$ ha la rappresentazione decimale formata da 999 nove. Qual è la somma delle cifre di $n^2$ ?

A) 8982 B) 8991 C) 9000 D) 9009 E) 9018

**29.** Quanti insiemi formati da numeri interi positivi consecutivi sono tali che la somma dei numeri che li costituiscono sia esattamente 100? (N.B. Si escluda l'insieme costituito dal solo numero 100).

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**30.** Sia ABCD un quadrilatero convesso di area unitaria, con AB e BD basi dei triangoli isosceli ABD e DBC rispettivamente. Sapendo inoltre che l'angolo $B\hat{C}D$ misura 100° e l'angolo $A\hat{D}B$ misura 20° (vedi figura), il prodotto $\overline{AC} \times \overline{BD}$ è uguale a:



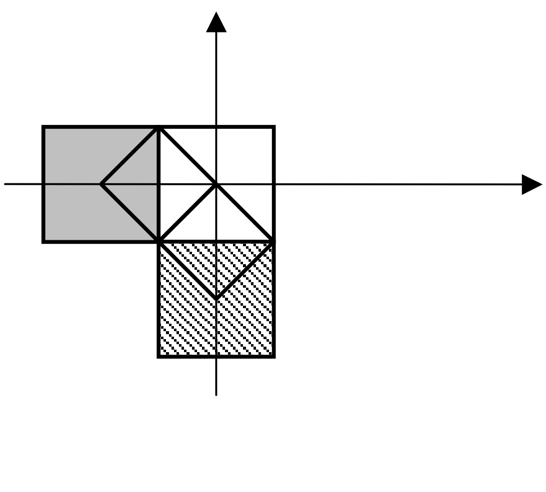

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) altra risposta

Student

**SOLUZIONI STUDENT 2004**

1. **(C)** Il costo totale delle penne è $m\times n+n\times n = 2mn$, quindi il costo medio di ognuna delle $m+n$ penne è $2mn/(m+n)$.
2. **(D)** Una piramide con 17 facce ha come base un poligono con 16 lati, quindi gli spigoli della piramide sono dati dai 16 lati della base e dai 16 segmenti congiungenti ognuno dei vertici della base con il vertice della piramide; in definitiva, gli spigoli della piramide sono 16 + 16 = 32.
3. **(E)** Dalla disuguaglianza $x^2 - 2004 \le 0$ segue $x^2 \le 2004$, quindi $-\sqrt{2004} \le x \le \sqrt{2004}$ .
4. **(B)** La somma degli angoli interni di un poligono regolare avente $n$ lati è $(n - 2)\times 180^\circ$, quindi il poligono in questione ha angoli interni la cui somma è $(16 - 2)\times 180^\circ/7 = 360^\circ$, cioè è un quadrato.
5. **(A)** Il numero totale di quadratini nel quadrato di lato $s$ è $s^2$; a questo numero va sottratto numero totale di quadratini sulle due diagonali che è $2s - 1$, in quanto ogni diagonale contiene $s$ quadratini, e il quadratino centrale appartiene a entrambe le diagonali; in definitiva, il numero totale di quadratini, cioè l'area della regione non dipinta è $s^2 - 2s + 1$.
6. **(C)** È impossibile che vi sia più di una celebrità, in quanto, se ve ne fossero due, dovrebbero conoscersi ed ignorarsi nello stesso tempo. D'altra parte è possibile sia che ve ne sia una, sia che non ve ne sia alcuna.
7. **(E)** Il triangolo *ABC*, equilatero di lato 2, ha area $\sqrt{3}$ ; il triangolo *ACE*, ha area la metà del precedente, dunque $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; il quadrilatero *ABCE* è unione dei due triangoli non sovrapposti *ABC* e *ACE*, e quindi ha area $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
8. **(B)** I numeri prescelti sono tutti potenze di 2 , in quanto $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, quindi il loro prodotto sarà anche esso un a potenza di 2, con esponente uguale alla somma degli esponenti, cioè compreso tra $5\times 0 = 0$ e $5\times 2 = 10$, ovvero una potenza di 2 compresa tra 1 e 1024; il solo numero tra le possibili risposte che soddisfa questi requisiti è 256.
9. **(C)** Se il numero dei pastori è $x$, dopo che la meta' dei pastori e un terzo delle pecore si sono allontanati, rimangono nel pascolo $x / 2$ pastori e 10 pecore, per un totale di $(x/2)\times 2 + 10\times 4$ gambe, quindi $x+40 = 50$, da cui $x = 10$; inizialmente quindi vi sono 10 pastori e 15 pecore, per un totale di 80 gambe.
10. **(B)** Sia *O* il centro della circonferenza: allora il triangolo *OBC* è equilatero, quindi l'angolo *BOC* misura 60°. Allora l'angolo alla circonferenza *BAC*, essendo la metà dell'angolo al centro *BOC*, misura 30°.
11. **(D)**



**12. (B)** Affinché un prodotto sia divisibile per 4, vi debbono essere almeno due fattori pari; per essere certi che ciò avvenga bisogna estrarre 52 carte: infatti è possibile che le prime 50 carte estratte rechino tutte numeri dispari.

**13. (D)** La media dei tentacoli della popolazione marziana è $(1\times3 + 97\times2 + 2\times1)/100 = 1{,}99$ , quindi hanno più tentacoli della media i marziani che hanno 2 o 3 tentacoli, cioè il 98% dei marziani.

**14. (E)** L'ultima cifra di una data potenza di un numero naturale dipende solo dall'ultima cifra del numero; in particolare, considerando i naturali da 0 a 9, si ha la seguente tabella per quanto riguarda i quadrati e i cubi.

| Num | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quad | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| Cubo | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Ne segue che i numeri i cui quadrati e cubi terminano con la stessa cifra sono i numeri la cui ultima cifra è una delle seguenti: 0, 1, 5, 6. Tra gli interi di due cifre ve ne sono 40 siffatti, comprendendo tra essi lo 0.

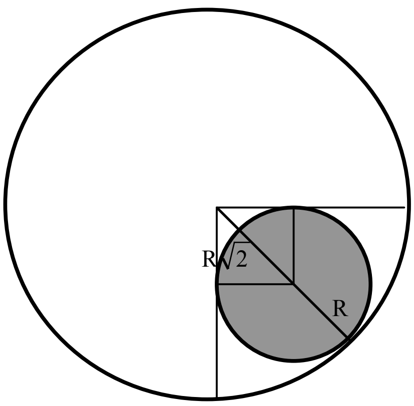
**15. (D)** Affinché il numero sia positivo deve esserci un indice $i$ tale che $a_i = 1$; sia $m$ il più grande di tali indici. Per $i < m$ si può assumere qualsiasi valore –1, 0, 1, mentre, per $i > m$, deve essere $a_i = 0$); in definitiva le possibili scelte sono 1+3+9+27+81=121.

**16. (C)** Il numero è 16, come si vede svolgendo i calcoli, quindi è la quarta potenza di 2, intero non nullo.

**17. (C)** Un triangolo rettangolo avente come vertice 3 tra i vertici di un 14 – gono regolare è inscritto nella stessa circonferenza in cui è inscritto il 14 – gono, quindi la sua ipotenusa è uno dei diametri della circonferenza. Il 14 – gono individua 7 diametri distinti sulla circonferenza; per ognuno di questi diametri sono disponibili 12 ulteriori vertici del 14 – gono con i quali si può costruire un triangolo rettangolo. In totale quindi i triangoli rettangoli così costruiti sono 7 x 12 = 84.

**18. (E)** Detto R il raggio della circonferenza K, si ha la relazione $R\sqrt{2}+R=6$, quindi

$R=\dfrac{6}{\sqrt{2}+1}=6(\sqrt{2}-1)$.

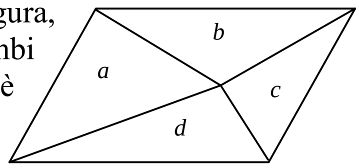



**19. (B)** In una progressione geometrica di ragione $q$ si ha $a_2{\cdot}a_3 = (a_2)^2q$, quindi $a_2{\cdot}a_3$ ha lo stesso segno di $q$; se fosse $q = 0$ si avrebbe $a_2=a_3=a_4$, mentre se fosse $q > 0$, i tre numeri $a_2$, $a_3$, $a_4$ sarebbero in ordine crescente o decrescente. La sola possibilità per avere $a_3 < a_2 < a_4$ è che sia $q < 0$, quindi $a_2{\cdot}a_3 < 0$.

**20. (E)** Usando il triangolo di Tartaglia si vede che $11^{2004} = (1 + 10)^{2004} = 1 + 2004 \times 10+$ (multipli di potenze di $10^n$, $n > 1$), quindi le ultime due cifre sono 4 e 1; in particolare la penultima cifra è 4.

**21. (A)** Sia $b$ la percentuale di elettori del partito dei broccoli, allora la percentuale di elettori degli altri partiti è $100 - b$, quindi la percentuale di coloro che ha già mangiato broccoli è $b + 90(100 - b)/100$. Dall'uguaglianza $b + 90(100 - b) / 100 = 46$, segue che $b = 40$.

**22. (A)** Siano $a$, $b$, $c$, $d$, le aree dei triangoli come indicato in figura, allora $a + c = b + d$, in quanto $a$ e $b$ sono due triangoli aventi entrambi come base la base del parallelogramma e la somma delle cui altezze è uguale all'altezza del parallelogramma, quindi $a + c$ è la metà dell'area del parallelogramma; un ragionamento analogo vale per $b = d$. Solo la quadrupla dei valori in A) può essere suddivisa in due coppie aventi la stessa somma, cioè $5 + 8 = 4 + 9$.




**23. (C)** Il grafico della funzione $f$ si ottiene traslando il grafico della $g$ indietro di due unità lungo l'asse delle $x$, il che corrisponde a considerare $g(x+2)$, e poi prendendone il simmetrico rispetto all'asse delle $x$, il che corrisponde a $-g(x+2)$.

**24. (A)** Il triangolo equilatero di lato 4 ha area $4\sqrt{3}$, quindi il settore circolare, di ampiezza 60°, ha area $2\sqrt{3}$, uguale alla metà dell'area del triangolo. Se r è il raggio del settore, l'area del settore stesso è un sesto dell'area del cerchio, quindi $\frac{\pi r^2}{6} = 4\sqrt{3}$, da cui $r = \sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$.

**25. (A)** Al posto 120 sarà stato aggiunta un'unità a ogni passaggio $n$ tale che $n$ divide 120; bisogna quindi contare i divisori di 120. Dalla scomposizione in fattori primi $120=2^3\times3\times5$, si vede che 120 ha esattamente 16 divisori.

**26. (B)** Un triangolo (eventualmente degenere) è individuato dalla scelta dei tre vertici (distinti) tra i 18 punti mostrati in figura, quindi vi sono $\binom{18}{3}$ (*coefficiente binomiale*) triangoli. Un triangolo degenere ha tutti i vertici su uno stesso lato, quindi su ogni lato vi sono $\binom{7}{3}$ triangoli degeneri. In definitiva, i triangoli non degeneri sono $\binom{18}{3} - 3 \times \binom{7}{3} = 711$.

**27. (B)** Vi sono sei differenti numeri di tre cifre distinte $a$, $b$, $c$, quindi ognuna delle tre cifre apparirà due volte come unità, come decine e come centinaia. La somma dei sei numeri è quindi $2 \times (a + b + c) \times (100 + 10 + 1)$, quindi $222 \times (a + b + c) = 1554$, da cui $a + b + c=7$, che unito alla condizione $0 < a < b < c$ implica $c = 4$.

**28. (B)** $n = 10^{999} - 1$, quindi $n^2 = 10^{1998} - 2 \times 10^{999} + 1$. In notazione decimale, $10^{1998}$ si scrive come uno seguito da 1998 zero, $10^{1998} - 2 \times 10^{999}$ si scrive come 998 nove, seguiti da un 8 e da

999 zero, $10^{1998} - 2 \times 10^{999} + 1$ si scrive come 998 nove, seguiti da un 8 da 998 zero e da un 1; quindi la somma delle cifre è $998 \times 9 + 1 \times 8 + 1 \times 1 = 8991$.

**29. (C)** La somma di $n$ interi positivi consecutivi a partire dall'intero $a$ è $a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + n - 1) = na + n(n-1)/2$, quindi $na + n(n - 1)/2 = 100$ da l'equazione $n(2a + n - 1) = 200$, che ha due sole possibili soluzioni intere con $a > 0$ e $n > 1$, cioè $n = 5$ e $a = 18$ e $n = 8$ e $a = 9$, come si vede facilmente usando il fatto che $n$ deve essere un divisore di 200; In definitiva vi sono due possibili modi di esprimere 100 come somma di interi positivi consecutivi, segnatamente $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$ e $100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$.

**30. (D)** Poiché il triangolo $ABD$ è isoscele, i due angoli alla base sono uguali, precisamente $DAB = DBA = 80^\circ$; similmente, poiché anche il triangolo $BCD$ è isoscele, si ha $CBD = CDB = 40^\circ$; dunque $ABC = ABD + DBC = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$ e $ADC = ADB + BDC = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$, da cui segue $BAD + BCD = ABC + ADC = 180^\circ$, per cui il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza.
Sia ora $O$ il punto di intersezione delle diagonali $AC$ e $BD$ del quadrilatero. Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$ sono uguali, in particolare $ACD = ABD = 80^\circ$; allora, nel triangolo $CDO$, l'angolo $COD$ ha ampiezza $180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$, quindi l'altezza $DH$, relativa alla base $CO$, è $DH = DO \times \text{sen } 60^\circ = DO\sqrt{3}/2$. Inoltre, $AOB = COD = 60^\circ$, in quanto angoli opposti al vertice, e similmente, nel triangolo $ABO$, l'altezza $BK$, relativa alla base $AO$, è data da $BK = BO \times \text{sen } 60^\circ = BO\sqrt{3}/2$. L'area del quadrilatero $ABCD$ è data dalla somma delle aree dei triangoli $ABC$ e $ACD$, quindi $1 = ABCD = ABC + ACD = (AC \cdot BK + AC \cdot DH)/2 = AC \cdot (BO\sqrt{3}/2 + DO\sqrt{3}/2)/2 = AC \cdot (BO + DO)\sqrt{3}/4 = AC \cdot BD\sqrt{3}/4$, da cui segue $AC \cdot BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.