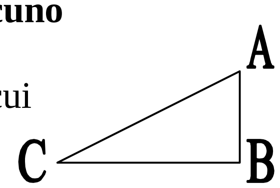
Kangourou Italia
Gara del 15 marzo 2001
Categoria Cadet
Per studenti di terza media e prima superiore

Regole:

- ***La prova è individuale. E' vietato l'uso di calcolatrici di qualunque tipo.***
- ***Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Le risposte esatte fanno sommare 3, 4 o 5 punti secondo la loro difficoltà (3 punti per i primi 10 quesiti, 4 punti per i quesiti da 11 a 20, 5 punti per gli ultimi 10). Ogni risposta errata fa sottrarre un quarto del suo valore in punti: si tolgono 0.75 punti per una risposta errata a un quesito da 3 punti, 1 punto se il quesito è da 4 punti, 1.25 se è da 5 punti. Se ad un quesito non viene data alcuna risposta il punteggio attribuito è 0. Ad esempio: se si risponde correttamente a 3 quesiti da 4 punti e si risponde in modo errato ad un quesito da 5 punti, il punteggio relativamente a questi quattro quesiti sarà*** $3\times4 - 1.25 = 10.75$.
- ***Durata della prova un'ora e quindici minuti. Inserite le vostre risposte nelle corrispondenti caselle della scheda delle risposte.***

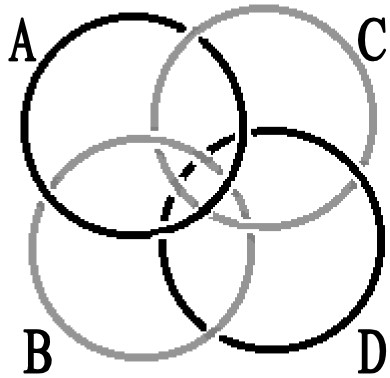
I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno



1. Un foglio di carta ha la forma di un triangolo rettangolo i cui lati misurano 3, 4 e 5 cm rispettivamente. Pieghiamo questo foglio in modo che il vertice C vada su B e poi pieghiamolo di nuovo in modo che A vada su B. Il foglio così ripiegato avrà la forma di
(A) un quadrato (B) un rettangolo non quadrato (C) un pentagono (D) un esagono non regolare (E) un rombo non quadrato.

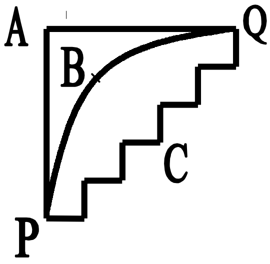
2. Roberta deve impacchettare in scatole da 10 dei kangourou di legno. Se 178 kangourou sono rossi e 121 sono blu, di quante scatole ha bisogno Roberta per impacchettarli tutti, non mescolando i due colori?
(A) 13 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 31.

3. Tagliando un solo anello, è possibile liberarli tutti?
(A) sì, tagliando A (B) sì, tagliando B (C) sì, tagliando C (D) sì, tagliando D (E) no.



4. I compagni di classe di Enrico sono 7 in più delle compagne. Nella stessa classe il numero dei ragazzi è il doppio di quello delle ragazze. Quante compagne ha Giovanna che è nella stessa classe di Enrico?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10.

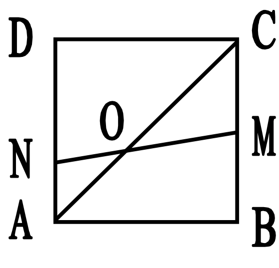
5. La figura a destra mostra alcune strade di una piccola città. La distanza tra A e P è uguale a quella tra A e Q che è di 500 metri. Il percorso da P a Q via A è di 215 metri



più lungo di quello via B. Allora il percorso via C, rispetto a quello via B, è
(A) di 275 metri più lungo (B) di 215 metri più lungo
(C) di 430 metri più lungo (D) di 43 metri più lungo
(E) più corto.

6. Moltiplicando due numeri appartenenti all'insieme {–9, –7, –5, 2, 4, 6}, qual è il minimo risultato che si può ottenere?
(A) –63 (B) –54 (C) –18 (D) –10 (E) 8.

7. ABCD è un quadrato. Quanto misura l'angolo COM, se l'angolo OND misura 60°?
(A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 30°
(E) 35°.



8. Un piccolo koala mangia le foglie di un intero albero di eucalipto in 10 ore. Sia suo padre sia sua madre mangiano due volte più veloci di lui. In quanto tempo i tre membri della famiglia insieme riusciranno a mangiare tutte le foglie dello stesso albero?

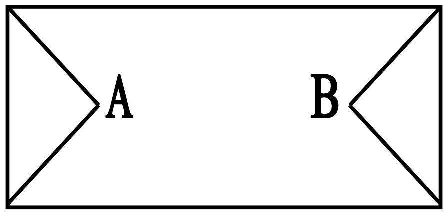
(A) due ore (B) 3 ore (C) 4 ore (D) 5 ore (E) 6 ore.

9. Qual è il rapporto tra l'area di un esagono regolare di lato 1 e l'area di un triangolo equilatero di lato 3?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1.

10. Quanti sono i possibili differenti percorsi per andare dal punto A al punto B nella figura, se non è permesso passare su alcun punto per più di una volta?

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8
(E) più di 10.



I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. La lunghezza del lato di un quadrato posto su un piano è di 1 cm. Ogni vertice di questo quadrato è centro di una circonferenza di raggio 1 cm, giacente nello stesso piano. In quanti punti del piano si intersecano queste circonferenze?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14.

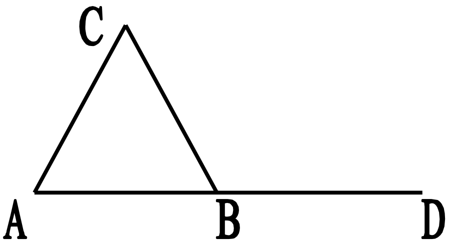
12. Su ciascuno di due tavoli vi sono 2001 noccioline. A Nicola spettano le noccioline di un tavolo, a Michele quelle dell'altro. Al primo giro, Nicola prende una nocciolina ogni tre; poi, al secondo giro, ne prende una ogni cinque delle rimaste. Al primo giro, Michele toglie una nocciolina ogni cinque; al secondo giro, una ogni tre delle rimaste. A questo punto, quale è la situazione?

(A) Nicola ha i 3/5 delle noccioline di Michele
(B) Michele ha i 3/5 delle noccioline di Nicola
(C) Michele ha 1 nocciolina in più di Nicola
(D) Nicola ha 1 nocciolina il più di Michele
(E) Michele e Nicola hanno lo stesso numero di noccioline.

13. Nell'espressione sottostante, ad ognuna delle lettere K, L, M, N e P corrisponde una e una sola cifra decimale. Quale cifra corrisponde alla lettera M?

$$4 \times \text{K L M N P 4} = \text{4 K L M N P}.$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.



14. ABC è un triangolo equilatero e B è il punto medio del segmento AD (v. figura). Un punto E è scelto nello stesso piano in modo che $\overline{DE} = \overline{AB}$. Si sa che la distanza tra C ed E è la massima possibile. Quanto misura l'angolo BED?
(A) 45° (B) 30° (C) 20° (D) 15° (E) 10°.

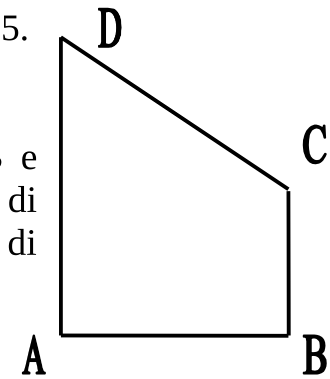
15. Un orologio digitale indica le ore (con due cifre, per le 24 ore) e i minuti (anche questi con due cifre). Quante volte tra un minuto dopo la mezzanotte (00:01) e un minuto prima della mezzanotte successiva (23:59) l'orologio digitale mostra lo stesso orario sia leggendo da sinistra a destra sia viceversa (per esempio, alle 15:51)?
(A) 10 (B) 13 (C) 15 (D) 18 (E) 24.

16. Ogni volta che il cammello Desirée ha sete, l'84% del suo corpo è costituito da acqua. Dopo aver bevuto, il suo peso raggiunge gli 800 kg e l'acqua costituisce l'85% del suo peso. Qual è il peso del cammello Desirée quando ha sete?
(A) 672 kg (B) 680 kg (C) 715 kg (D) 720 kg (E) 750 kg.

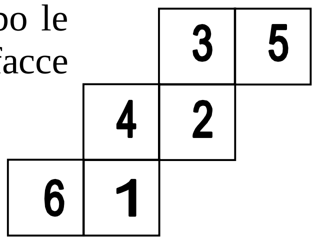
17. Eros e Gianni partecipano ad una corsa su pista. Ognuno corre ad una velocità costante: Eros percorre 5 giri in 12 minuti; Gianni percorre 3 giri in 10 minuti. Sapendo che sono partiti assieme dalla linea di partenza, dopo quanti giri essi tagliano ancora assieme per la prima volta la linea di partenza? Si chiede il totale dei giri percorsi dai due.
(A) 3 (B) 43 (C) 86 (D) 90 (E) 135.

18. Nel disegno a fianco, l'angolo A è uguale all'angolo B e misura 90°; inoltre il rapporto tra l'area di ABCD e l'area di ACB vale 3. Si chiede quanto vale il rapporto tra l'area di ADB e l'area di ACB.

(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\sqrt{2}$.

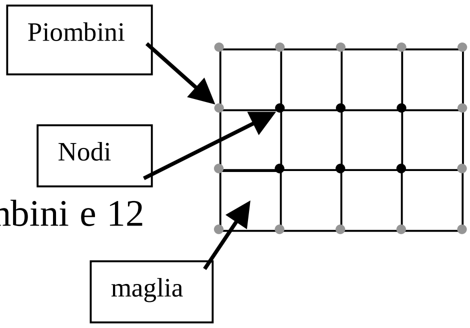


19. Nella figura a fianco è presentato lo sviluppo di un cubo le cui facce sono state numerate da 1 a 6. Quando tre facce determinano un vertice del cubo, moltiplica tra loro i numeri che compaiono sulle facce, ottenendo così 8 numeri. Qual è il più grande di essi?



(A) 40 (B) 60 (C) 72 (D) 90 (E) 120.

20. Un pescatore costruisce da solo una rete a maglie quadrate. Cucendola ha fatto esattamente 32 nodi all'interno e ha messo 28 piombini sul perimetro della rete. Quante maglie ha quella rete? (nel disegno vi sono 6 nodi, 14 piombini e 12 maglie)



(A) 40 (B) 45 (C) 54 (D) 60 (E) 64.

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

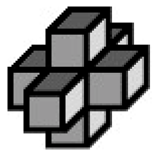
21. Quale tra i seguenti numeri non può essere in alcun caso il numero di parti che si ottengono tagliando una torta rotonda con 4 diversi tagli rettilinei di coltello?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 12.

22. In una competizione di salti per kangourou, ogni partecipante esegue 5 salti. Ogni salto è valutato con un punteggio tra 1 e 20. Il salto con il punteggio inferiore (o uno dei salti che hanno ottenuto lo stesso punteggio inferiore, nel caso siano più di uno) non viene contato nel punteggio finale. Prima di scartare il salto con il punteggio inferiore, la somma dei punteggi relativi ai 5 salti di Joey era di 72. Allora il punteggio finale è almeno

(A) 52 (B) 54 (C) 57 (D) 58 (E) 72.

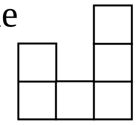
23. Maddalena costruisce un talismano incollando fra loro sette dadi in base alla regola seguente: incollare fra loro due facce che abbiano lo stesso numero di punti. Mentre gioca con il suo capolavoro, questo le scivola dentro un secchio contenente vernice bianca. Estratto il talismano, Maddalena si accorge che tutti i punti sono scomparsi. A quanto ammontava la somma di tutti i punti sulla superficie del talismano? (In un dado la somma dei punti su facce opposte vale sempre 7.)

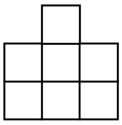


(A) 95 (B) 102 (C) 105 (D) 112 (E) 126.

24. Qual è la prima cifra del più piccolo numero naturale la somma delle cui cifre sia 2001?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

25. A fianco avete la vista da sinistra e frontale di una costruzione ottenuta accostando piccoli cubi. Quanti cubetti sono stati usati? Vengono richiesti il numero minimo ed il massimo di cubetti compatibili con le raffigurazioni mostrate.





(A) 7 e 13 (B) 8 e 13 (C) 7 e 15 (D) 7 e 16 (E) 8 e 16.

26. Ho 11 scatole grandi: alcune di esse contengono 8 scatole medie ciascuna, alcune delle scatole medie contengono a loro volta 8 scatole piccole ciascuna. Se le scatole (di varia dimensione) vuote sono 102, quante sono in totale le scatole (a prescindere dalla dimensione)?
(A) 102 (B) 64 (C) 118 (D) 115 (E) non è possibile rispondere.

27. Un pallone da calcio è cucito con pezzi di cuoio a forma di pentagono regolare o esagono regolare. Ogni pentagono è circondato da 5 esagoni e ogni esagono è circondato da 3 pentagoni e da 3 esagoni. Il pallone ha 12 pentagoni. Quanti esagoni deve avere?
(A) 60 (B) 30 (C) 20 (D) 15 (E) 10.

28. Il prodotto delle età dei miei figli (in anni) vale 1664. Il minore ha la metà degli anni del maggiore e non vi sono gemelli. Quanti figli ho?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

29. Vi sono 10 ragazzi in una classe. Sabato prossimo si terrà un'importante concerto rock in un locale della città. Quanti differenti gruppi i ragazzi possono formare, per assistere al concerto, se Federico andrà al concerto solo nel caso ci vada anche il suo compagno Daniele?
(A) 512 (B) 640 (C) 724 (D) 768 (E) 1024.

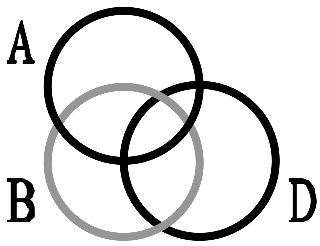
30. Andrea e Nicola giocano nel modo seguente: essi prendono a turno da un mucchio di sassolini alcuni di questi fino ad un massimo di 7. Non è consentito prendere tanti sassolini quanti ne ha presi l'avversario all'ultima mossa. Perde chi non può più muovere. Partendo da un mucchietto di 20 sassolini, quanti sassolini deve prendere Andrea alla prima mossa se vuole essere certo della vittoria, sapendo che lui e Nicola giocheranno il meglio possibile?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

Risposte Categoria Cadet
Gara del 15 marzo 2001

1. (B) Poiché il lato che si ottiene piegando C su B è parallelo ad AB e quello che si ottiene A su B è parallelo a BC.

2. (E) servono 18 scatole per quelli di un colore e 13 per quelli dell'altro colore, in totale 31 scatole.

3. (C) bisogna aprire l'anello C, toglierlo, poi gli altri potranno essere sfilati poiché A è solo sovrapposto a B che a sua volta è solo sovrapposto a D.



4. (B) indicando con "M" il numero degli allievi maschi e con "F" il numero delle allieve femmine, la prima relazione fornisce M = F+7+1 (ai maschi bisogna aggiungere Enrico); la seconda invece si traduce in M = 2F. Dunque 2F = F+8, da cui F = 8. Le compagne di Giovanna sono allora 7.

5. (B) i percorsi da P a Q via A o via C sono equivalenti; la somma delle lunghezze dei tratti orizzontali del percorso PCQ eguaglia la lunghezza di AQ mentre la somma delle lunghezze dei tratti verticali eguaglia la lunghezza di AP.

6. (B) il prodotto minimo sarà negativo, bisognerà moltiplicare dunque un positivo per un negativo. Il minimo possibile si ottiene moltiplicando –9 per 6, ottenendo –54.

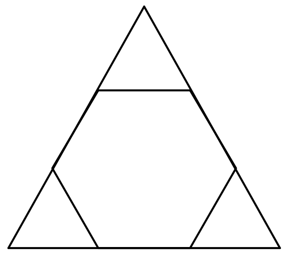
7. (B) $\angle$OND è l'angolo esterno al triangolo ONA, è dunque congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti ($\angle$NAO + $\angle$NOA). Poiché $\angle$NAO misura 45° ne segue che $\angle$NOA misura 15°. L'angolo $\angle$COM misura anch'esso 15° poiché è opposto al vertice a $\angle$NOA.

8. (A) se la madre mangia due volte più velocemente del piccolo koala, considerare la madre è come considerare due piccoli koala; ripetendo il ragionamento con il

padre è come se fossero 5 piccoli koala che decidessero di mangiare le foglie dello stesso albero, dunque il tempo di 10 ore si deve dividere per 5.

9. (A) L'area di un esagono regolare di lato 1 corrisponde alla somma di 6 aree di triangoli equilateri di lato 1, cioè

$$6 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

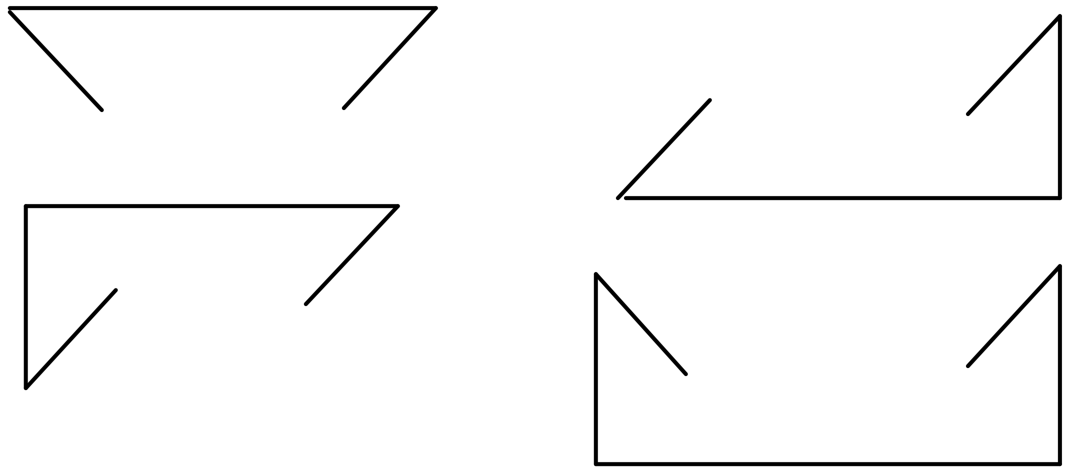


L'area di un triangolo equilatero di lato 3 vale

$$3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

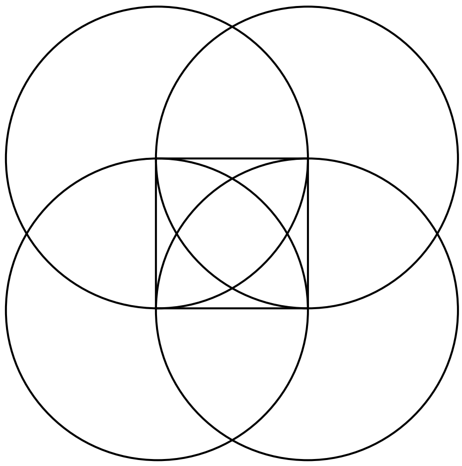
Il rapporto vale allora $\frac{2}{3}$.

10. (D) per la simmetria della figura i percorsi possibili devono essere un numero pari:



e le quattro a queste simmetriche rispetto alla retta per A e B.

11. (D) come si può facilmente notare nella figura i punti d'incontro tra le circonferenze sono 12.

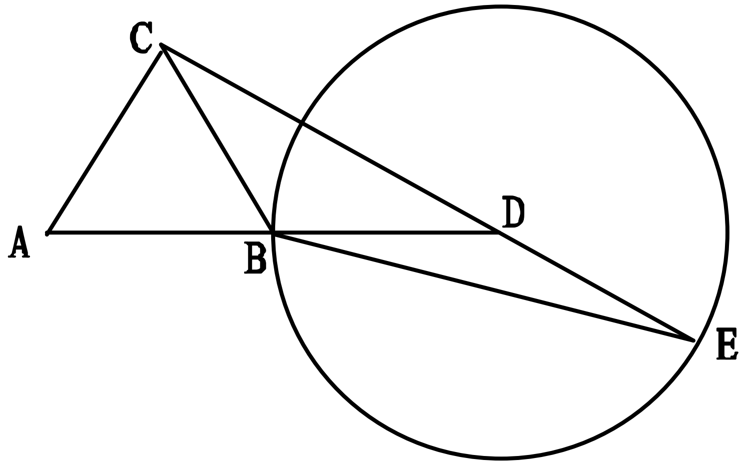


12. (E) Al primo passaggio Nicola toglie 2000:5=400 noccioline, lasciandone 1601 da

cui al secondo giro toglie 1599:3=533 noccioline: in totale 933 noccioline. Invece Michele toglie la prima volta 2001:3=667 noccioline, lasciandone 1334 da cui al secondo giro toglie 1330:5=266 noccioline: in totale ancora 933 noccioline.

13. (C) l'espressione completa è $4 \times 1\,0\,2\,5\,6\,4 = 4\,1\,0\,2\,5\,6$.

14. (D) l'angolo CDB misura 30° e dunque BED misura 15° (l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco).

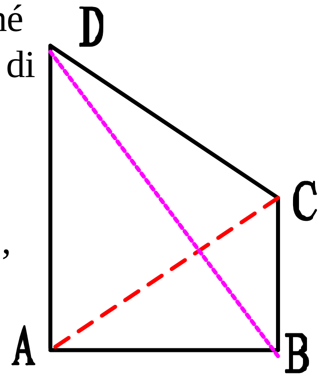


15. (C) vi sono cinque casi che iniziano con la cifra 0 (01:10, 02:20, 03:30, 04:40 e 05:50); ve ne sono poi sei che iniziano con la cifra 1 (10:01, 11:11, 12:21, 13:31, 14:41 e 15:51); infine quattro sono i casi che iniziano con la cifra 2 (20:02, 21:12, 22:22, 23:32). Dunque in totale 15 casi.

16. (E) Chiamiamo P il peso (in kg) di Desirée quando ha sete. Se dopo aver bevuto Desirée pesa 800 kg vuol dire che ha ingoiato A=(800-P) kg di acqua. D’altra parte, dopo la bevuta, l’85% del peso, cioè 680 kg, è formato da acqua: dunque, prima che Desirée bevesse, l’acqua contenuta nel suo corpo pesava 680-A=(P+680-800) kg. Se questo è l’84% del peso P, si deve avere 100×(P-120)=84×P, cioè P=750 kg.

17. (B) Eros e Gianni tornano sicuramente insieme sul traguardo dopo un’ora (visto che 60 è divisibile tanto per 10 che per 12): a questo punto hanno percorso 5×5+3×6=43 giri complessivi. Non è possibile che siano passati in precedenza insieme sul traguardo: questo implicherebbe aver fatto meno giri complessivi, ma l’unica risposta inferiore a 43 è 3, palesemente assurda, poiché implicherebbe che la velocità di Eros fosse doppia di quella di Gianni.

18. (A) Se area(ABCD)=3×area(ABC), cioè se AB×(BC+AD):2=3×AB×BC:2, si deve avere BC+AD=3×BC, cioè AD=2×BC. Allora, visto che i triangoli ABD e ABC hanno la stessa base (AB) ma l'altezza del primo è doppia di quella del secondo, anche la prima area sarà doppia

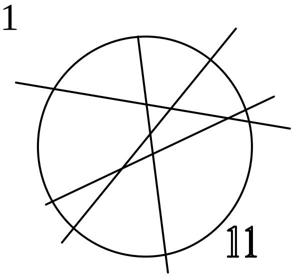


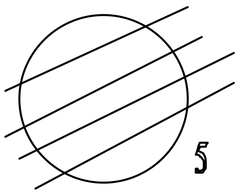
della seconda.

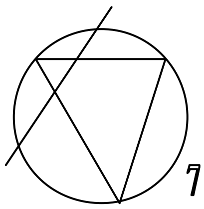
19. (D) nel vertice in cui concorrono le facce numerate 6, 3, 5 si ottiene il massimo valore per il prodotto che è 90. Gli altri prodotti ottenibili sono tutti superiori: 124, 125, 146, 156, 234, 235, 346, 356.

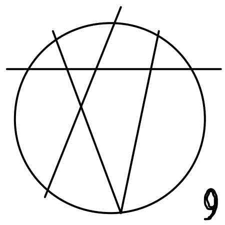
20. (B) 32 nodi possono essere disposti su una riga e 32 colonne o su 2 righe e 16 colonne o ancora su 4 righe e 8 colonne. Solo questa ultima disposizione è accettabile con i 28 piombini, più precisamente i 32 nodi disposti su 4 righe e 8 colonne sono circondati da un rettangolo con 4 piombini nei vertici, 8 su ciascun lato lungo e 4 su ciascun lato corto. Le maglie che si ottengono sono $9 \times 5 = 45$.

21. (E) con quattro tagli rettilinei si possono al più ottenere 11 regioni come nel disegno seguente in cui ogni segmento incontra tutti gli altri, dunque non si possono ottenere 12 regioni. Mostriamo tuttavia che tutte le altre risposte sono ottenibili:









22. (D) 72:5 = 14.4, Joey potrebbe avere effettuato 4 salti con punti 14 e uno con punti 16, al più dovrà dunque scartare 14 punti, nel qual caso il punteggio finale sarà $72 - 14 = 58$. Con ogni altro punteggio Joey potrebbe scartare un valore inferiore a 14.

23. (C) Ogni dado ha 21 punti e le facce non visibili dei 6 dadi esterni sono coincidenti con le facce del dado interno e quindi contengono in totale 21 punti: dunque i punti visibili sono $21 \times 6 - 21 = 105$.

24. (C) $222 \times 9 = 1998$, dunque il più piccolo intero la cui somma delle cifre dia 2001 è quello formato dalla cifra 3 seguita da 222 cifre 9.

25. (E) La pianta della costruzione si può certamente inscrivere in una scacchiera quadrata 3×3: numeriamo le righe di tale scacchiera dall'alto verso il basso e le colonne da sinistra a destra e denotiamo la singola casella scrivendo nell'ordine il numero della riga e il numero della colonna a cui appartiene: ad esempio la casella che sta sulla riga in alto e sull'ultima colonna si indica con (1, 3).
Rappresentiamo la fronte della costruzione sulla prima riga e il lato sulla prima colonna. Allora, viste la proiezione frontale e laterale
   a) nella casella (3, 2) devono stare 3 cubetti sovrapposti **(visione laterale e frontale)**
   b) almeno una casella della riga 2 deve essere occupata da un cubetto, ma nessuna da due o più cubetti sovrapposti **(visione laterale)**
   c) nelle caselle della colonna 1 deve esserci almeno una pila di 2 cubetti, in posizione (1, 1) o (3, 1), per quanto detto al punto precedente; lo stesso deve succedere nella terza colonna in posizione (3, 1) o (3, 3) **(visione frontale)**
   d) se entrambe le colonne 1 e 3 contengono una sola pila di due cubetti, almeno una deve stare sulla prima riga **(visione laterale)**
   e) sulla prima riga non ci possono essere pile di più di 2 cubetti **(visione laterale)**.

   Se ora in ogni casella riportiamo il numero di cubetti che si possono sovrapporre in quella posizione, si vede che ci sono 9 configurazioni minime, ciascuna contenente 8 cubetti e una sola configurazione massima, contenente 16 cubetti, ecco di seguito una delle possibili configurazioni complete

MINIMO

2		2
	1	
	3	

MASSIMO

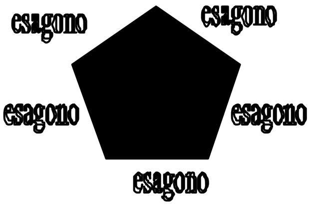
2	2	2
1	1	1
2	3	2

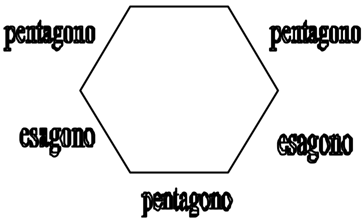
Le altre possibili configurazioni minime sono le seguenti:

2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	2	2	0	2
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	3	2	2	3	0	0	3	2	2	3	0	0	3	2	2	3	0	0	3	0	0	3	0

26. (D) Sia x il numero delle scatole grandi contenenti 8 scatole medie e sia y il numero delle scatole medie contenenti 8 scatole piccole. Il numero totale di scatole vuote allora è: $(11 - x) + (8x - y) + 8y$. Questo numero deve essere 102, quindi: $x + y = 13$. Il numero delle scatole in totale è $11 + 8x + 8y$ e quindi vale $11 + 8(x + y) = 11 + 104 = 115$.

27. (C) guardiamo le figure seguenti:





vi sono $12\times5 = 60$ possibili esagoni uniti ai pentagoni (figura a sinistra). Ogni esagono è contato 3 volte per le sue "unioni" ai pentagoni (figura a destra), dunque 60:3 = 20 esagoni.

28. (B) 1664 si può scomporre in $2^7 \times 13$: 13 non può essere l'età massima, poiché dovrebbe essere il doppio della minima ma non è pari, dunque l'età massima è una potenza di 2: tra le potenze di 2 maggiori di 13 l'unica che può rappresentare l'età del figlio maggiore è 16 (32 o un numero maggiore implicherebbe che l'età del figlio minore è maggiore di 13): dunque l'unica soluzione possibile è che i tre figli abbiano rispettivamente 8, 13 e 16 anni. Dunque i figli sono 3.

29. (D) Nel caso in cui Federico decida di andare, allora certo Daniele farà parte del gruppo, vi sono allora $2^8 = 256$ possibilità di formare gruppi (si può pensare al numero di elementi dell'insieme delle parti di un insieme di 8 elementi). Se invece Federico non partecipasse, si devono contare gli elementi dell'insieme delle parti di un insieme di 9 elementi che sono $2^9 = 512$. In totale 512 + 256 = 768 possibilità.

30. (C) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono posizioni vincenti ed anche 8 lo è poiché togliendo 4 sassolini si impedisce all'avversario di vincere (non ne può togliere 4). 9 è una posizione perdente: qualunque sia la mossa mette l'avversario in una posizione vincente. Con 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 sassolini si vince ancora: basta togliere il complemento a 9, mentre con 17 si ha una posizione perdente. Con 18, 19 o 20 si vince: è infatti sufficiente togliere tanti sassolini da "spedire" l'avversario nella posizione perdente di 17. Nel nostro caso la mossa deve essere di togliere 3 sassolini.